

Олимпиада школьников СПбГУ по математике  
Примеры заданий отборочного этапа  
2021/2022 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) Будем называть дату разнообразной, если в её записи вида ДД/ММ/ГГ (день-месяц-год) встречаются все цифры от 0 до 5. Сколько разнообразных дат в 2013 году?

**Ответ:** 2.

**Решение.** Заметим, что в любой дате 2013 года в указанной форме записи используются цифры 1 и 3, поэтому для дня и месяца разнообразной даты остаются цифры 0, 2, 4 и 5.

Обозначим через  $D_1$  и  $D_2$  первую и вторую цифры в записи дня, а через  $M_1$  и  $M_2$  — первую и вторую цифры в записи месяца. Поскольку в году 12 месяцев,  $M_1 \leq 1$ , откуда  $M_1 = 0$ . Кроме того, в каждом месяце не более 31 дня, и из оставшихся цифр для  $D_1$  подходит только 2. Цифры 4 и 5 могут располагаться на позициях  $D_2$  и  $M_2$  произвольным образом, давая корректную дату.

2. (10 баллов) Любой вид природопользования влияет хотя бы на один из природных ресурсов, к каковым относятся: литогенная основа, почва, вода, воздух, растительный мир, животный мир. Виды, влияющие на один и тот же набор ресурсов, относят к одному типу. В ходе исследований выяснилось, что виды природопользования, развивавшиеся в последние 700 лет, можно разделить на 23 типа. Сколько типов осталось незадействованными?

**Ответ:** 40.

**Решение.** По условию имеется 6 природных ресурсов. Поэтому типы определяются упорядоченными наборами из шести нулей и единиц, где 1 соответствует задействованному ресурсу, а 0 — не задействованному. Кроме того, набор из одних нулей недопустим по условию. Таким образом, количество возможных типов равно  $2^6 - 1 = 63$ . Поскольку 23 типа были использованы, незадействованными остались  $63 - 23 = 40$  типов.

3. (10 баллов) Назовем словом любую конечную последовательность букв русского алфавита. Сколько различных шестибуквенных слов можно составить из букв слова СКАЛКА? А семибуквенных слов из букв слова ТЕФТЕЛЬ? В ответе укажите частное от деления большего из найденных чисел на меньшее.

**Ответ:** 7.

**Решение.** В слове СКАЛКА шесть букв, но дважды встречается буква А и дважды встречается буква К. Следовательно, количество различных слов будет равно  $\frac{6!}{2!2!}$ . В

слове ТЕФТЕЛЬ семь букв, и дважды встречаются буквы Т и Е, поэтому количество различных слов из букв этого слова будет больше и будет равно  $\frac{7!}{2! \cdot 2!}$ . Легко видеть, что частное от деления большего на меньшее будет равно 7.

4. (20 баллов) На доске написано несколько положительных чисел. Сумма пяти наибольших из них составляет 0,29 суммы всех чисел, а сумма пяти наименьших — 0,26 суммы всех чисел. Сколько всего чисел написано на доске?

**Ответ:** 18.

**Решение.** Пусть общее количество чисел равно  $k + 10$ . Из условия ясно, что  $k > 0$ . Можно считать, что сумма всех чисел равна 1 (иначе поделим каждое из чисел на эту сумму, условие задачи сохранится). Упорядочим числа по возрастанию:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq a_{5+1} \dots \leq a_{5+k} \leq a_{6+k} \leq a_{7+k} \leq a_{8+k} \leq a_{9+k} \leq a_{10+k}.$$

Тогда

$$0,26 = a_1 + \dots + a_5 \leq 5a_5 \leq 5a_6 \implies a_6 \leq 0,26/5.$$

Кроме того,

$$0,29 = a_{k+6} + \dots + a_{k+10} \geq 5a_{k+6} \geq 5a_{k+5} \implies a_{k+5} \geq 0,26/5.$$

Пусть  $s = a_6 + \dots + a_{k+5}$ . Заметим, что  $s = 1 - 0,26 - 0,29 = 0,45$ . Поэтому

$$0,45 = s \geq k \cdot a_6 \geq \frac{0,26k}{5}, \quad 0,45 = s \leq k \cdot a_{k+5} \leq \frac{0,29k}{5}.$$

Следовательно,

$$\frac{0,45 \cdot 5}{0,29} \leq k \leq \frac{0,45 \cdot 5}{0,26} \iff 7,75 < \frac{225}{29} \leq k \leq \frac{225}{26} < 8,65.$$

Из целых  $k$  этому двойному неравенству удовлетворяет только 8. Таким образом, всего на доске написано  $8 + 10 = 18$  чисел.

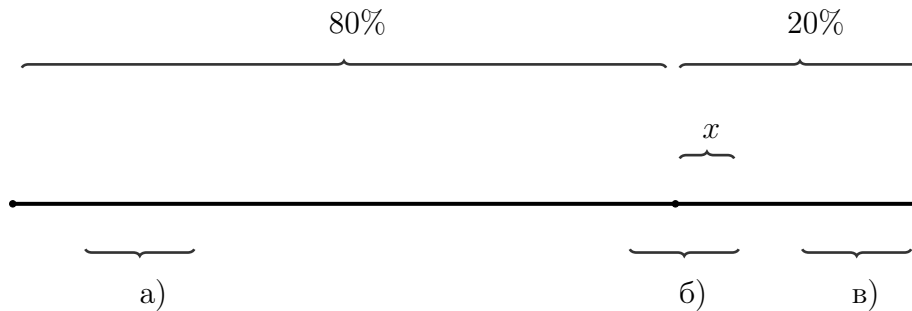
5. (20 баллов) Письменная работа студентов имеет двухбалльную систему оценивания, т. е. работа будет либо зачтена, если она выполнена хорошо, либо не зачтена, если выполнена плохо. Работы сначала проверяются нейронной сетью, дающей неверный ответ в 10% случаев, а затем все работы, признанные незачтенными, перепроверяются вручную экспертами, которые не ошибаются. Нейронная сеть может как отнести к незачтенным хорошую работу, так и наоборот — отнести к зачтенным плохую. Известно, что среди всех сданных студентами работ на самом деле 20% плохих. Какой наименьший процент плохих работ может быть среди тех, которые эксперты перепроверяют после отбора нейронной сетью? В ответе укажите целую часть числа.

**Ответ:** 66.

**Решение.** Работы студентов представим на рисунке ниже.

Ошибки нейронной сети могут:

- а) отнести все 10% хороших работ к плохим;
- б) отнести часть хороших работ к плохим, а часть плохих — к хорошим;
- в) отнести все 10% плохих работ к хорошим.



Проанализируем общий случай. Пусть  $x$  — процент от общего числа работ, ошибочно отнесенных к хорошим (это те из плохих работ, которые не попадут к экспертам);  $0 \leq x \leq 10$ . Тогда на перепроверку эксперты получают (в процентах от всех работ):

плохие работы, в которых нейронная сеть не ошиблась — их  $(20 - x)\%$ ;

хорошие работы, ошибочно отнесенные к плохим — их  $(10 - x)\%$ .

Таким образом, процент перепроверяемых плохих работ равен

$$\frac{(20 - x) \times 100}{(20 - x) + (10 - x)} = \frac{(20 - x) \times 100}{30 - 2x} = 50 + \frac{500}{30 - 2x}.$$

Эта функция возрастает на всей области определения, поэтому в условиях задачи принимает наименьшее значение при  $x = 0$ . Это значение равно  $66\frac{2}{3}$ , а его целая часть равна 66.

6. (20 баллов) Пусть дана последовательность неотрицательных целых чисел

$$k, k + 1, k + 2, \dots, k + n.$$

Найдите наименьшее  $k$ , при котором сумма всех чисел последовательности равна 100.

**Ответ:** 9.

**Решение.** Указанная последовательность чисел является арифметической прогрессией с  $n + 1$  членами. Ее сумма равна  $\frac{(n+1)(2k+n)}{2}$ . Поэтому условие переписывается в виде  $(n + 1)(2k + n) = 200$ , где  $n$  — неотрицательное целое число. Очевидно, что  $k$  уменьшается при увеличении  $n$ . Значит, нам надо подобрать наибольшее  $n$ , при котором  $k$  окажется целым. Заметим, что

$$200 = (n + 1)(2k + n) > n^2 \implies n < \sqrt{200} \implies n \leq 14.$$

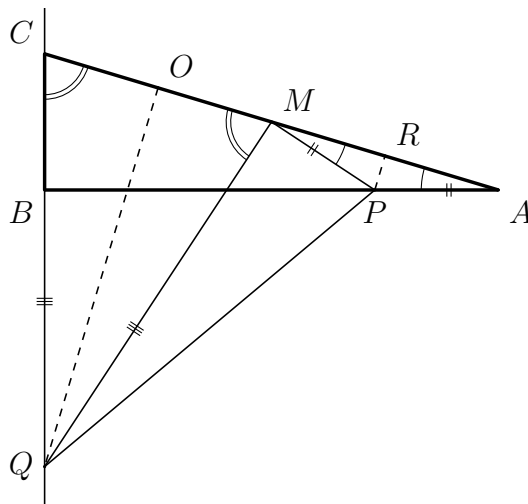
Кроме того,  $200 = 2^3 \cdot 5^2$ . Рассмотрим два случая.

- 1)  $n$  четно. Наибольшее  $n \leq 14$ , при котором 200 делится на  $n + 1$ , равно 4, откуда  $k = \frac{40-4}{2} = 18$ .

2)  $n$  нечетно. Тогда  $n$  может быть равно только 1, 3, 7 (иначе 200 не делится на  $n + 1$ ).

При  $n = 7$  мы получим  $k = 9$ . Оно и будет наименьшим.

7. (30 баллов) Точка  $M$  — середина гипотенузы  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Точки  $P$  и  $Q$  на прямых  $AB$  и  $BC$  соответственно таковы, что  $AP = PM$  и  $CQ = QM$ . Найдите величину угла  $\angle PQM$ , если  $\angle BAC = 17^\circ$ .



**Ответ:**  $17^\circ$ .

**Решение.** Поскольку в прямоугольном треугольнике  $ABC$  угол  $BAC = 17^\circ$ , угол  $BCA = 73^\circ$ . Заметим, что треугольник  $QMC$  является равнобедренным с основанием  $MC$ , так как по условию  $QM = QC$ . Аналогично, треугольник  $PMA$  — равнобедренный с основанием  $MA$ . Следовательно, углы при основаниях этих треугольников равны. Отсюда получаем, что  $\angle QMP = 180^\circ - \angle PMA - \angle QMC = 180^\circ - 17^\circ - 73^\circ = 90^\circ$ .

Пусть точки  $O$  и  $R$  — основания перпендикуляров, опущенных на прямую  $AC$  из точек  $Q$  и  $P$  соответственно. Легко заметить, что треугольники  $QOM$  и  $MRP$  подобны по двум углам. Поскольку  $CM = MA$ , из равнобедренности треугольников  $QCM$  и  $PMA$  вытекает, что

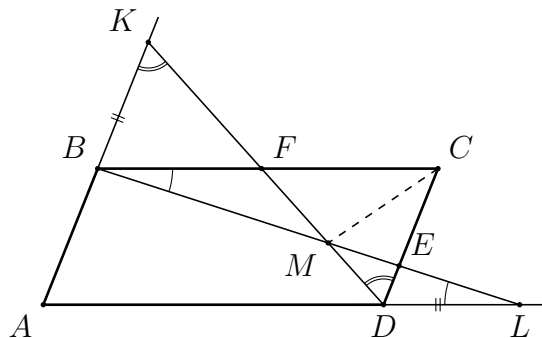
$$MO = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}MA = MR.$$

Обозначим  $x = MO$ . Из прямоугольных треугольников  $QOM$  и  $MRP$  получаем, что  $MQ = \frac{x}{\cos 73^\circ}$  и  $MP = \frac{x}{\cos 17^\circ}$  соответственно. Таким образом, для треугольника  $MQP$  имеем

$$\operatorname{tg} \angle PQM = \frac{MP}{MQ} = \frac{x}{\cos 17^\circ} \cdot \frac{\cos 73^\circ}{x} = \frac{\cos(\pi/2 - 17^\circ)}{\cos 17^\circ} = \operatorname{tg} 17^\circ.$$

Поскольку в прямоугольном треугольнике  $MQP$  угол  $PQM$  острый, из последнего равенства вытекает, что  $\angle PQM = 17^\circ$ .

8. (30 баллов) На продолжении стороны  $AB$  параллелограмма  $ABCD$  за точку  $B$  отмечена точка  $K$ , а на продолжении стороны  $AD$  за точку  $D$  — точка  $L$ . Оказалось, что  $BK = DL$ . Отрезки  $BL$  и  $DK$  пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что  $CM$  — биссектриса угла  $BCD$ .



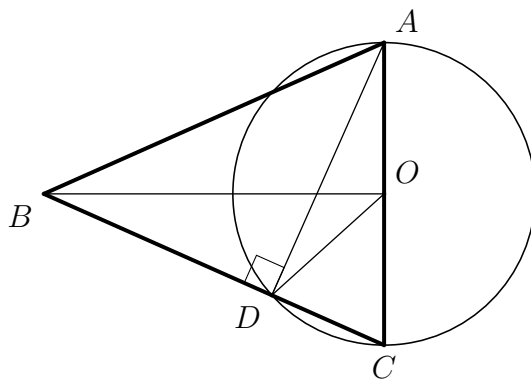
**Решение.**

Поскольку  $AB \parallel DC$ , то треугольники  $BKM$  и  $MDE$  подобны по двум углам. Следовательно,  $\frac{BM}{ME} = \frac{BK}{DE}$ . По условию  $BK = DL$ . Отсюда получаем, что  $\frac{BM}{ME} = \frac{DL}{DE}$ .

Заметим, что треугольники  $BCE$  и  $DEL$  подобны по двум углам, поэтому  $\frac{BC}{CE} = \frac{DL}{DE}$ . Таким образом,  $\frac{BC}{CE} = \frac{BM}{ME}$ . Это равенство эквивалентно тому, что  $CM$  — биссектриса треугольника  $BCE$ , то есть угла  $BCE$ .

9. (30 баллов) На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность с центром  $O$ , пересекающая сторону  $BC$  этого треугольника в точке  $D$ . Найдите радиус вписанной окружности треугольника  $ABC$ , если  $OD = 4$ ,  $DC = 3$ , а центр описанной окружности треугольника  $ABC$  лежит на  $BO$ .

**Ответ:**  $\frac{4\sqrt{55}}{11}$ .



**Решение.** Точка  $O$  — середина  $AC$ . Поскольку центр описанной окружности треугольника  $ABC$  лежит на его медиане  $BO$ , то эта медиана совпадает с серединным перпендикуляром к стороне  $AC$ , и треугольник  $ABC$  — равнобедренный с основанием  $AC$ .

Угол  $ADC$  прямой как вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности. В треугольнике  $ABC$  проведены две высоты —  $BO$  и  $AD$ . Следовательно, треугольник  $DOC$  подобен треугольнику  $ABC$  с коэффициентом подобия  $k = \cos \angle ACB = \frac{DC}{AC} = \frac{3}{8}$ . По формуле Герона

$$p_{DOC} = \frac{2DO + DC}{2} = \frac{11}{2}, \quad S_{DOC} = \sqrt{\frac{11}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{55}}{2}.$$

Поэтому

$$r_{ABC} = \frac{r_{DOC}}{k} = \frac{3\sqrt{55}}{4} : \frac{11}{2} : \frac{3}{8} = \frac{4\sqrt{55}}{11}.$$

10. (40 баллов) На бал пришли 100 мальчиков и 100 девочек, пронумерованных числами от 1 до 100. Иногда мальчики и девочки танцевали (в танце участвуют пары из мальчика и девочки). После всех танцев оказалось, что для каждой девочки можно поделить всех мальчиков на две группы так, что суммарно с мальчиками из первой группы девочка танцевала столько же раз, сколько и с мальчиками из второй группы. Докажите, что для некоторого  $k$  мальчик  $k$  танцевал с девочкой  $k$  не более половины всех своих танцев.

**Решение.** Предположим, что для любого  $k$  мальчик  $k$  танцевал с девочкой  $k$  более половины своих танцев. Тогда, суммируя по всем мальчикам, мы получим, что танцев между мальчиком и девочкой с одинаковыми номерами было больше, чем между мальчиками и девочками с разными номерами. Теперь посмотрим на ситуацию со стороны девочек. Мальчик  $k$  попал в одну из двух групп мальчиков, с которыми девочка  $k$  танцевала половину своих танцев. Значит, с мальчиком  $k$  эта девочка танцевала не более половины всех своих танцев. Суммируя по всем  $k$ , мы получим, что танцев между мальчиком и девочкой с одинаковыми номерами было НЕ больше, чем между мальчиками и девочками с разными номерами. Противоречие с доказанным ранее.

11. (40 баллов) Назовём хвостом натурального числа любое число, которое получается из него отбрасыванием одной или нескольких первых цифр. Например, 234, 34 и 4 — хвосты числа 1234. Существует ли шестизначное число без нулей в десятичной записи, которое делится на каждый из своих хвостов?

**Ответ:** Да (подходит 721875).

**Решение.** Предположим, что требуемое число существует. Запишем его в виде  $A = \overline{a_5 a_4 \dots a_0}$ . Тогда  $A$  делится на свой пятизначный хвост, то есть на  $\overline{a_4 \dots a_0}$ . Значит, на  $\overline{a_4 \dots a_0}$  делится разность  $A$  и его хвоста, равная  $a_5 \cdot 10^5$ . Следовательно, нам нужно перебрать пятизначные делители  $a_5 \cdot 10^5$  без нулей в десятичной записи. Любой делитель числа  $a_5 \cdot 10^5$  есть произведение  $a_5$  на некоторые степени пятерки и двойки. Поскольку на 0 это произведение оканчиваться не должно, оно не может содержать одновременно и двойку, и пятерку. Если мы берем только двойки, то получаем число, не превосходящее  $a_5 \cdot 2^5 \leq 9 \cdot 2^5 = 288$ , то есть не пятизначное. Значит, нам нужно число  $a_5 \cdot 5^n$ , причем с нечетным  $a_5$ . Заметим, что  $n = 5$ , иначе  $a_5 \cdot 5^n \leq 9 \cdot 625 = 5625$ , и это число также не пятизначное. Наконец,  $a_5 > 3$ , поскольку число  $3 \cdot 5^5 = 9375$  четырехзначное.

С учетом рассмотренных ограничений мы получаем три возможных варианта:  $5 \cdot 5^5$ ,  $7 \cdot 5^5$ ,  $9 \cdot 5^5$ . Второй из них дает число 721875, которое нам подходит:

$$721875/21875 = 33; 721875/1875 = 385; 721875/875 = 825;$$

$$721875/75 = 9625; 721875/5 = 144375.$$

Несложно проверить, что два других варианта не годятся. Но в этом нет необходимости, поскольку ответ уже получен.

12. (40 баллов) *Петя задумал некоторое натуральное число. За один ход он может домножить его на любое рациональное число от  $1/3$  до 2. Докажите, что за несколько таких операций Петя сможет получить число 1001.*

**Первое решение.** Заметим, что любое рациональное число из интервала  $[1001/2; 1001 \cdot 3]$  можно умножить на рациональное число из интервала  $[1/3; 2]$ , чтобы в итоге получилось число 1001. Докажем, что произвольное положительное число домножениями на разрешенные числа можно поместить в этот интервал. Если мы имеем число, меньшее  $1001/2$ , то будем умножать его на 2. Рассмотрим первый момент, когда число стало больше или равно  $1001/2$ . Пусть до этого было число  $N < 1001/2$ , а стало  $2N \geq 1001/2$ . Тогда  $2N < 1001/2 \cdot 2 < 1001 \cdot 3$ . Следовательно,  $2N$  лежит в нужном интервале. Если изначально число было больше, чем  $1001 \cdot 3$ , то аналогично будем умножать его на  $1/2$ , пока оно не станет меньше  $1001 \cdot 3$ .

**Второе решение.** Если в какой-то момент мы имеем число  $n$ , то умножив его на  $\frac{n+1}{n}$ , мы получим  $n+1$ . А умножив его на  $\frac{n-1}{n}$ , мы получим  $n-1$ . Очевидно, что операциями увеличения или уменьшения на 1 из любого натурального числа можно получить 1001. Осталось только проверить, что мы умножаем на разрешенные числа. Действительно,  $1 < \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 2$  и при  $n \geq 2$  выполнено  $1/3 \leq 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} < 1$ .

13. (40 баллов) *В лагерь приехали 90 школьников. Известно, что среди любых 10 школьников обязательно найдутся два друга. Скажем, что группа школьников образует цепочку дружб, если детей в группе можно занумеровать числами от 1 до  $k$  так, что 1-й и 2-й — друзья, 2-й и 3-й — друзья, ...,  $(k-1)$ -й и  $k$ -й — друзья. Докажите, что всех школьников можно разбить не более чем на 9 групп, каждая из которых образует цепочку дружб. (Группа из одного школьника тоже образует цепочку дружб.)*

**Решение.** Возьмем какое-то разбиение школьников на цепочки (например, на одноэлементные группы). Пусть  $A$  и  $B$  — крайние школьники из разных цепочек. Если они дружат, то их группы можно объединить, связав  $A$  и  $B$  друг с другом. Будем проводить такие объединения до тех пор, пока это возможно. Если осталось более 9 цепочек, то выберем в каждой из них по крайнему школьнику. Их не менее 10, и по условию среди них найдутся два друга. Но тогда их цепочки можно объединить, что неверно. Значит, осталось не более 9 цепочек.

14. (40 баллов) *Определите знак суммы*

$$\left(\sqrt{2021} - \sqrt{2020}\right)^3 + \left(\sqrt{2020} - \sqrt{2019}\right)^3 + \left(\sqrt{2019} - \sqrt{2021}\right)^3,$$

*не выполняя возведение слагаемых в третью степень.*

**Ответ:** Выражение отрицательно.

**Решение.** Если  $a + b + c = 0$ , то  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ , поскольку

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + (ab + bc + ac)(a + b + c).$$

У нас  $a = \sqrt{2021} - \sqrt{2020} > 0$ ,  $b = \sqrt{2020} - \sqrt{2019} > 0$ ,  $c = \sqrt{2019} - \sqrt{2021} < 0$ .