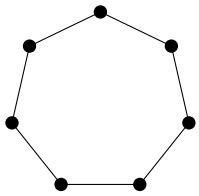
Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2021/2022 учебный год. 10 – 11 классы.

Вариант 1

1. *На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:*
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ответ: $n = 35$.

Решение. Сделаем два замечания.

1) *n нечетно.* Действительно, пусть n четно. Среди семи чисел всегда есть три числа одной четности, и по условию они должны быть попарно соединены. Но на картинке нет циклов длины 3.

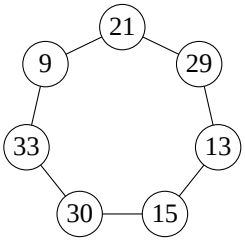
2) *Если q — простой делитель n, то среди четырех последовательно соединенных чисел существует пара соседних, сумма которых не кратна q.* Возьмем цепочку (a, b, c, d) последовательно соединенных чисел. По условию

$$a + d = (a + b) - (b + c) + (c + d) \ \vdots\ p.$$

Тогда числа a и d тоже соединены, то есть на картинке получился цикл длины 4, которого там нет.

Из 1) и 3) вытекает, что число n имеет по крайней мере два различных нечетных простых делителя. Пусть их ровно два (скажем, p и q). Покажем, что они отличны от 3. Допустим, например, что $p = 3$. Не более двух чисел делятся на 3 (если их три, то они образуют цикл). Остальные числа разобьем на две группы, дающие при делении на 3 остатки 1 и 2. Одна из этих групп пуста, иначе любое число из меньшей группы будет соединено по крайней мере с тремя числами из другой группы, что невозможно. Сумма чисел из одной группы на 3 не делится. Поэтому существует трехзвенная цепочка, в которой сумма любой пары соединенных чисел не кратна 3 и, значит, делится на q. Но это противоречит 2).

Таким образом, если n имеет ровно два различных нечетных простых делителя, то $n \geqslant 5 \cdot 7 = 35$. Если же таких делителей больше двух, то $n \geqslant 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 > 35$. Расстановка для $n = 35$ приведена на рисунке. $\square$



2. *При $x, y, z \in (0, 2]$ найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{(x^3 - 6)\sqrt[3]{x+6} + (y^3 - 6)\sqrt[3]{y+6} + (z^3 - 6)\sqrt[3]{z+6}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ответ: 1.

Решение. При $x \in (0, 2]$ справедливы неравенства $\sqrt[3]{x+6} \leqslant 2$ и $x^3 \leqslant 2x^2$, откуда

$$(x^3 - 6)\sqrt[3]{x+6} \leqslant 2\,(2x^2 - 6).$$

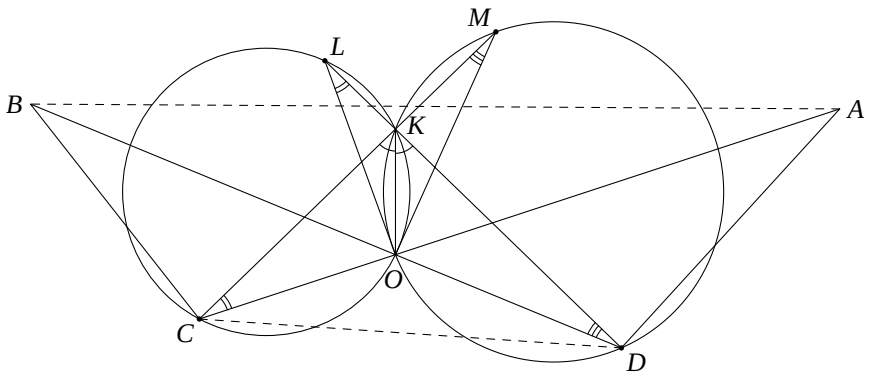
Аналогичным образом оцениваются два других слагаемых в числителе A. Поэтому

$$A \leqslant 2 \cdot \frac{2x^2 - 6 + 2y^2 - 6 + 2z^2 - 6}{x^2 + y^2 + z^2} = 4 - \frac{36}{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant 4 - \frac{36}{12} = 1.$$

Равенство реализуется при $x = y = z = 2$. $\square$

3. *Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Внутри треугольника AOB выбрана такая точка K, что прямая KO является биссектрисой угла CKD. Луч DK вторично пересекает описанную окружность треугольника COK в точке L, а луч CK вторично пересекает описанную окружность треугольника DOK в точке M. Найдите отношение площадей треугольников ALO и BMO.*

Ответ: 1.



Решение. Пусть r_1 и r_2 — радиусы окружностей, описанных около треугольников COK и DOK соответственно. Заметим, что

$$\angle LKO = 180^\circ - \angle DKO = 180^\circ - \angle CKO = \angle MKO,$$

откуда $\dfrac{LO}{MO} = \dfrac{r_1}{r_2}$. Кроме того, из вписанности $ABCD$ вытекает, что треугольники AOD и BOC подобны по двум углам. Тогда

$$\frac{AO}{BO} = \frac{OD}{OC} = \frac{r_2}{r_1},$$

так как хорды OD и OC соответствуют одинаковым вписанным углам. Поэтому

$$\frac{LO}{MO} \cdot \frac{AO}{BO} = 1 \Longleftrightarrow LO \cdot AO = MO \cdot BO.$$

Поскольку $\angle KMO = \angle KDO$ и $\angle KLO = \angle KCO$, треугольники MCO и DLO подобны, откуда

$$\angle AOL = \angle AOM + \angle LOM = 180^\circ - \angle COM + \angle LOM = \\ = 180^\circ - \angle DOL + \angle LOM = \angle BOL + \angle LOM = \angle BOM.$$

Таким образом,

$$S_{AOL} = \tfrac{1}{2} \cdot LO \cdot AO \cdot \sin\angle AOL = \tfrac{1}{2} \cdot MO \cdot BO \cdot \sin\angle BOM = S_{BOM}. \quad \square$$

4. *Натуральное число x в системе счисления с основанием r ($r \leqslant 36$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $2q = 5p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму r-ичных цифр числа x^2.*

Ответ: 36.

Решение. Договоримся писать $u \equiv v \pmod{w}$, если $(u - v) \vdots w$. Пусть $p = 2s$, $q = 5s$. Тогда $x = \overline{ppqq}_r = (pr^2 + q)(r + 1) = s\,(2r^2 + 5)(r + 1)$. Из условия на x^2 вытекает равенство

$$s^2(2r^2 + 5)^2(r^2 + 2r + 1) = a\big(1 + r^6\big) + b\big(r + r^5\big) + c\big(r^2 + r^4\big), \qquad (*)$$

где a, b, c — некоторые r-ичные цифры. Сделаем два наблюдения.

1) При любом натуральном n

$$r^n = (1 + r - 1)^n \equiv (-1)^n \big(1 - n(1 + r)\big) \pmod{(1 + r)^2}.$$

Правая часть $(*)$ кратна $(1 + r)^2$, откуда

$$0 \equiv a\big(2 - 6(1 + r)\big) - b\big(2 - 6(1 + r)\big) + c\big(2 - 6(1 + r)\big) = 2\big(1 - 3(1 + r)\big)(a - b + c) \pmod{(1 + r)^2}.$$

Поскольку $1 - 3(1 + r)$ взаимно просто с $(1 + r)^2$, на $(1 + r)^2$ делится $2\,(a - b + c)$. Но это число лежит в интервале $(-2r, 4r) \subset \big(-(1 + r)^2, (1 + r)^2\big)$, откуда $b = a + c$.

2) Приравняем остатки левой и правой частей $(*)$ от деления на $1 + r^2$:

$$18s^2r \equiv br(1 + r^4) \equiv 2br \pmod{(1 + r^2)}.$$

Поскольку r взаимно просто с $1 + r^2$, на $1 + r^2$ делится $2\,(9s^2 - b)$. Заметим, что $4s^2 \leqslant r - 1$, иначе число x^2 будет восьмизначным. Кроме того, $r \geqslant 5s + 1 \geqslant 6$. Поэтому

$$2\,(9s^2 - b) < 18s^2 \leqslant \tfrac{9}{2}\,(r - 1) < 6r < 1 + r^2, \quad 2\,(9s^2 - b) \geqslant -2b > -2r > -1 - r^2.$$

Таким образом, $b = 9s^2$.

Поскольку b — r-ичная цифра, из 2) вытекает, что $9s^2 < r \leqslant 36$, откуда $s^2 < 4$. Так как $s > 0$, мы получаем $s = 1$ и $b = 9$. В силу 1) сумма цифр x^2 равна $2\,(a + b + c) = 4b = 36$. $\square$

Замечание. Прямым вычислением проверяется, что $2255^2_{21} = 4950594_{21}$. Таким образом, описанная в условии ситуация реализуется.

5. *При каких n клетчатую доску $n \times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 2×2 и некоторое количество полосок из пяти клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?*

Ответ: при всех n, дающих остаток 2 от деления на 5.

Решение. Если доску $n \times n$ удалось разрезать на один квадрат 2×2 и некоторое количество полосок из пяти клеток, то $n^2 = 2^2 + 5m$, откуда n дает остаток 2 или 3 от деления на 5. Предположим, что $n = 5k + 3$ и доску удалось разрезать требуемым образом. Развернем ее так, чтобы квадрат примыкал к верхней стороне доски. Запишем в клетках верхней строки единицы, в клетках следующей за ней строки — двойки, и так далее. Заметим, что сумма чисел в пяти последовательных строках кратна 5, поскольку

$$ni + n\,(i + 1) + n\,(i + 2) + n\,(i + 3) + n\,(i + 4) = 5n\,(i + 2) \vdots 5.$$

Поэтому остаток от деления на 5 суммы всех расставленных чисел равен

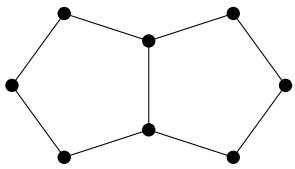
$$(n + 2n + 3n) \bmod 5 = 6\,(5k + 3) \bmod 5 = 3.$$

С другой стороны, в каждой полоске сумма чисел кратна пяти, а в квадрате сумма чисел равна $1 + 1 + 2 + 2 = 6$. Значит, остаток от деления на 5 суммы всех расставленных чисел равен 1, и мы получаем противоречие.

Если $n = 5k + 2$, то можно вырезать угловой квадрат 2×2, верхнюю полоску $2 \times 5k$ разрезать на горизонтальные полоски из пяти клеток, а прямоугольник $5k \times (5k + 2)$ разрезать на вертикальные полоски из пяти клеток. $\square$

Вариант 2

1. *На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:*
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ответ: $n = 35$.

Решение. Сделаем два замечания.

1) *n нечетно.* Действительно, пусть n четно. Среди восьми чисел всегда есть три числа одной четности, и по условию они должны быть попарно соединены. Но на картинке нет циклов длины 3.

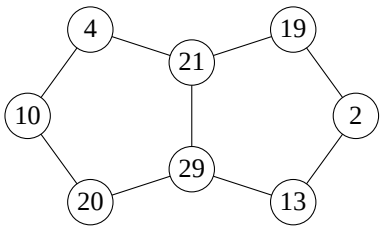
2) *Если q — простой делитель n, то среди четырех последовательно соединенных чисел существует пара соседних, сумма которых не кратна q.* Возьмем цепочку (a, b, c, d) последовательно соединенных чисел. По условию

$$a + d = (a + b) - (b + c) + (c + d) \ \vdots \ p.$$

Тогда числа a и d тоже соединены, то есть на картинке получился цикл длины 4, которого там нет.

Из 1) и 3) вытекает, что число n имеет по крайней мере два различных нечетных простых делителя. Пусть их ровно два (скажем, p и q). Покажем, что они отличны от 3. Допустим, например, что $p = 3$. Не более двух чисел делятся на 3 (если их три, то они образуют цикл). Остальные числа (их не менее 6) разобьем на две группы, дающие при делении на 3 остатки 1 и 2. Покажем, что одна из этих групп пуста. Если это не так, то каждое число из одной группы соединено с любым числом из другой. Но тогда в одной группе не более трех чисел, а в другой — не более двух, что невозможно. Сумма чисел из одной группы на 3 не делится. Поэтому существует трехзвенная цепочка, в которой сумма любой пары соединенных чисел не кратна 3 и, значит, делится на q. Но это противоречит 2).

Таким образом, если n имеет ровно два различных нечетных простых делителя, то $n \geqslant 5 \cdot 7 = 35$. Если же таких делителей больше двух, то $n \geqslant 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 > 35$. Расстановка для $n = 35$ приведена на рисунке. $\square$



2. *При $x, y, z \geqslant 3$ найдите минимальное значение выражения*

$$A = \frac{(x^3 - 24)\sqrt[3]{x + 24} + (y^3 - 24)\sqrt[3]{y + 24} + (z^3 - 24)\sqrt[3]{z + 24}}{xy + yz + zx}.$$

Ответ: 1.

Решение. При $x \geqslant 3$ справедливы неравенства $\sqrt[3]{x+24} \geqslant 3$ и $x^3 \geqslant 3x^2$, откуда

$$(x^3 - 24)\sqrt[3]{x+24} \geqslant 3\,(3x^2 - 24).$$

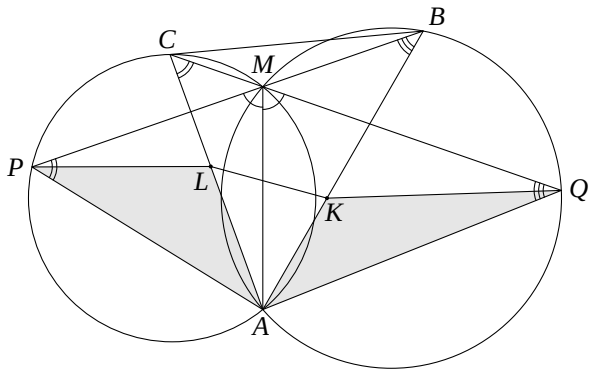
Аналогичным образом оцениваются два других слагаемых в числителе A. Поэтому

$$A \geqslant 3 \cdot \frac{3x^2 - 24 + 3y^2 - 24 + 3z^2 - 24}{xy + yz + zx} = 9\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} - \frac{24}{xy+yz+zx}\right) \geqslant 9\left(1 - \frac{24}{27}\right) = 1.$$

Равенство реализуется при $x = y = z = 3$. $\square$

3. *На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC отмечены соответственно такие точки K и L, что четырехугольник $BKLC$ является вписанным. Внутри этого четырехугольника выбрана точка M так, что прямая AM является биссектрисой угла BMC. Луч BM вторично пересекает описанную окружность треугольника AMC в точке P, а луч CM вторично пересекает описанную окружность треугольника AMB в точке Q. Найдите отношение площадей треугольников ALP и AKQ.*

   Ответ: 1.



Решение. Пусть r_1 и r_2 — радиусы окружностей, описанных около треугольников AMB и AMC соответственно. Так как AM — биссектриса угла BMC, справедливы равенства

$$\angle AMB = \angle AMC \quad \text{и} \quad \angle AMP = \angle AMQ,$$

откуда $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{AQ}{AP}$. Кроме того, из вписанности $BKLC$ вытекает, что

$$\angle ALK = 180^\circ - \angle KLC = \angle ABC.$$

Значит, треугольники ALK и ABC подобны по двум углам. Поэтому

$$\frac{AL}{AK} = \frac{AB}{AC} = \frac{AQ}{AP} \Longrightarrow AL \cdot AP = AK \cdot AQ.$$

Из равенств $\angle ABM = \angle AQM$ и $\angle APM = \angle ACM$ вытекает, что $\angle BAP = \angle CAQ$, откуда

$$\angle LAP = \angle CAP = \angle BAP - \angle BAC = \angle CAQ - \angle BAC = \angle BAQ = \angle KAQ.$$

Таким образом,

$$S_{ALP} = \tfrac{1}{2} \cdot AL \cdot AP \cdot \sin\angle LAP = \tfrac{1}{2} \cdot AK \cdot AQ \cdot \sin\angle KAQ = S_{AKQ}. \quad \square$$

4. *Натуральное число x в системе счисления с основанием r ($r \leqslant 400$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $7q = 17p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму r-ичных цифр числа x^2.*

Ответ: 400.

Решение. Договоримся писать $u \equiv v \pmod{w}$, если $(u - v) \vdots w$. Пусть $p = 7s$, $q = 17s$. Тогда $x = \overline{ppqq}_r = (pr^2 + q)(r + 1) = s\,(7r^2 + 17)(r + 1)$. Из условия на x^2 вытекает равенство

$$s^2(7r^2 + 17)^2(r^2 + 2r + 1) = a\big(1 + r^6\big) + b\big(r + r^5\big) + c\big(r^2 + r^4\big), \qquad (*)$$

где a, b, c — некоторые r-ичные цифры. Сделаем два наблюдения.

1) При любом натуральном n

$$r^n = (1 + r - 1)^n \equiv (-1)^n\,\big(1 - n(1 + r)\big) \pmod{(1 + r)^2}.$$

Правая часть $(*)$ кратна $(1 + r)^2$, откуда

$$0 \equiv a\,\big(2 - 6(1 + r)\big) - b\big(2 - 6(1 + r)\big) + c\big(2 - 6(1 + r)\big) = 2\,\big(1 - 3(1 + r)\big)(a - b + c) \pmod{(1 + r)^2}.$$

Поскольку $1 - 3(1 + r)$ взаимно просто с $(1 + r)^2$, на $(1 + r)^2$ делится $2\,(a - b + c)$. Но это число лежит в интервале $(-2r, 4r) \subset \big(-(1 + r)^2, (1 + r)^2\big)$, откуда $b = a + c$.

2) Приравняем остатки левой и правой частей $(*)$ от деления на $1 + r^2$:

$$200s^2r \equiv br\,(1 + r^4) \equiv 2br \pmod{(1 + r^2)}.$$

Поскольку r взаимно просто с $1 + r^2$, на $1 + r^2$ делится $2\,(100s^2 - b)$. Заметим, что $49s^2 \leqslant r - 1$, иначе число x^2 будет восьмизначным. Кроме того, $r \geqslant 17s + 1 \geqslant 18$. Поэтому

$$2\,(100s^2 - b) < 200s^2 \leqslant \frac{200}{49}\,(r - 1) < 5r < 1 + r^2, \quad 2\,(100s^2 - b) \geqslant -2b > -2r > -1 - r^2.$$

Таким образом, $b = 100s^2$.

Поскольку b — r-ичная цифра, из 2) вытекает, что $100s^2 < r \leqslant 400$, откуда $s^2 < 4$. Так как $s > 0$, мы получаем $s = 1$ и $b = 100$. В силу 1) сумма цифр x^2 равна $2\,(a + b + c) = 4b = 100$. $\square$

Замечание. Прямое вычисление показывает, что $\big(7, 7, 17, 17\big)^2_{120} = \big(49, 100, 51, 0, 51, 100, 49\big)_{120}$. Таким образом, описанная в условии ситуация реализуется.

5. *При каких n клетчатую доску $n \times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 3×3 и некоторое количество полосок из семи клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?*

Ответ: при всех n, дающих остаток 3 от деления на 7.

Решение. Если доску $n \times n$ удалось разрезать на один квадрат 3×3 и некоторое количество полосок из семи клеток, то $n^2 = 3^2 + 7m$, откуда n дает остаток 3 или 4 от деления на 7. Предположим, что $n = 7k + 4$ и доску удалось разрезать требуемым образом. Развернем ее так, чтобы квадрат примыкал к верхней стороне доски. Запишем в клетках верхней строки единицы, в клетках следующей за ней строки — двойки, и так далее. Заметим, что сумма чисел в семи последовательных строках кратна 7, поскольку

$$ni + n\,(i + 1) + n\,(i + 2) + n\,(i + 3) + n\,(i + 4) + n\,(i + 5) + n\,(i + 6) = 7n\,(i + 3) \vdots 7.$$

Поэтому остаток от деления на 7 суммы всех расставленных чисел равен

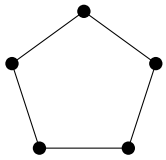
$$(n + 2n + 3n + 4n) \bmod 7 = 10\,(7k + 4) \bmod 7 = 5.$$

С другой стороны, в каждой полоске сумма чисел кратна семи, а в квадрате сумма чисел равна $3 + 6 + 9 = 18$. Значит, остаток от деления на 7 суммы всех расставленных чисел равен $18 \bmod 7 = 4$, и мы получаем противоречие.

Если $n = 7k + 3$, то можно вырезать угловой квадрат 3×3, верхнюю полоску $3 \times 7k$ разрезать на горизонтальные полоски из семи клеток, а прямоугольник $7k \times (7k + 3)$ разрезать на вертикальные полоски из семи клеток. $\square$

Вариант 3

1. *На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Таня выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:*
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма a^2+b^2 должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа a^2+b^2 и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1. При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ответ: $n = 65$.

Решение. Сделаем вначале три замечания.

1) *n нечетно.* Действительно, пусть n четно. Среди пяти чисел всегда есть три числа одной четности, и по условию они должны быть попарно соединены. Но на картинке нет циклов длины 3.

2) *Если d — делитель n, то не более двух чисел кратны d.* Пусть нашлось три таких числа. Тогда они должны быть попарно соединены и, значит, образуют трехзвенный цикл.

3) *Если q — простой делитель n, то среди четырех последовательно соединенных чисел существует пара соседних, сумма квадратов которых не кратна q.* Пусть нашлась такая цепочка (a, b, c, d) последовательно соединенных чисел, что сумма квадратов любой пары соседних чисел кратна q. Тогда

$$a^2 + d^2 = \left(a^2 + b^2\right) - \left(b^2 + c^2\right) + \left(c^2 + d^2\right) \ \vdots \ q.$$

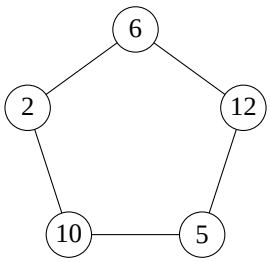
Значит, числа a и d соединены, то есть на картинке получился цикл длины 4, которого там нет.

Из 1) и 3) вытекает, что число n имеет по крайней мере два различных нечетных простых делителя. Пусть их ровно два (скажем, p и q). Покажем, что они отличны от 3, 7, 11. Допустим, например, что $p \in \{3, 7, 11\}$. Заметим, что для любого натурального a

$$a^2 \bmod 3 \in \{0, 1\}, \quad a^2 \bmod 7 \in \{0, 1, 2, 4\}, \quad a^2 \bmod 11 \in \{0, 1, 3, 4, 5, 9\}.$$

Поэтому a^2+b^2 кратно p тогда и только тогда, когда на p делятся a^2 и b^2, а значит, a и b. В силу 2) этому условию может удовлетворять лишь одна пара. Из остальных четырех пар соединенных чисел можно составить трехзвенную цепочку, в которой сумма квадратов каждой пары соседних чисел кратна q. Но это противоречит 3).

Таким образом, если n имеет ровно два различных нечетных простых делителя, то $n \geqslant 5 \cdot 13 = 65$. Если же таких делителей больше двух, то $n \geqslant 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 > 65$. Расстановка для $n = 65$ приведена на рисунке. $\square$



2. *При $x, y, z \geqslant 1$ найдите минимальное значение выражения*

$$A = \frac{\sqrt{3x^4 + y} + \sqrt{3y^4 + z} + \sqrt{3z^4 + x} - 3}{xy + yz + zx}.$$

Ответ: 1.

Решение. Заметим, что при $x, y \geqslant 1$

$$\sqrt{3x^4+y}-1=\sqrt{x^4+2x^4+y}-1 \geqslant \sqrt{x^4+2x^2+1}-1=x^2.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\sqrt{3y^4+z}-1 \geqslant y^2, \quad \sqrt{3z^4+x}-1 \geqslant z^2.$$

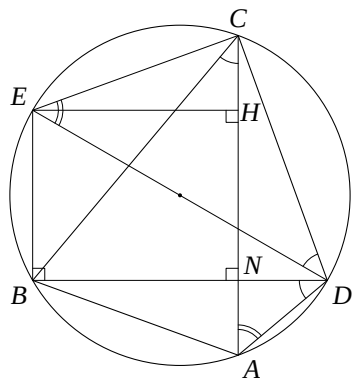
Поэтому

$$A \geqslant \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} \geqslant 1.$$

Равенство реализуется при $x=y=z=1$. $\square$

3. *Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями. На описанной вокруг него окружности отмечена точка E, диаметрально противоположная D, причем отрезки AB и DE не пересекаются. Найдите отношение площадей треугольника BCD и четырехугольника $ABED$.*

Ответ: 1.



Решение. Пусть N — точка пересечения AC и BD, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки E на прямую AC. По условию DE — диаметр окружности. Тогда $\angle DBE = 90^\circ$, откуда $BE \parallel AC$. Кроме того, $\angle DCE = 90^\circ$ и

$$\angle CDE = 90^\circ - \angle DEC = 90^\circ - \angle DAC = \angle ADB,$$

откуда $CE = AB$. Значит, $ABEC$ — равнобедренная трапеция, и

$$CN = AC - AN = AC - CH = AH.$$

Осталось заметить, что

$$2 \cdot S_{ABED} = BD \cdot AN + BD \cdot BE = BD \cdot AH = BD \cdot CN = 2 \cdot S_{BCD}. \quad \square$$

4. *На доске написано число $x = 9999$ в системе счисления с четным основанием r. Вася выяснил, что r-ичная запись x^2 представляет собой восьмизначный палиндром, у которого сумма второй и третьей цифр равна 24. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?*

Ответ: $r = 26$.

Решение. Договоримся писать $u \equiv v \pmod{w}$, если $(u-v) \vdots w$. По условию существуют такие r-ичные цифры a, b, c, d, что $b + c = 24$ и

$$81\,(r+1)^2(r^2+1)^2 = a\,(r^7+1) + b\,(r^6+r) + c\,(r^5+r^2) + d\,(r^4+r^3). \qquad (*)$$

Сделаем некоторые наблюдения.

1) Так как $r^6 \equiv -1 \pmod{(r^2+1)}$, справедливы равенства

$$r^7+1 \equiv 1-r \pmod{(r^2+1)} \quad \text{и} \quad r^6+r \equiv r-1 \pmod{(r^2+1)}.$$

Кроме того, $r^4 \equiv 1 \pmod{(r^2+1)}$, откуда

$$r^5+r^2 \equiv r-1 \pmod{(r^2+1)} \quad \text{и} \quad r^4+r^3 \equiv 1-r \pmod{(r^2+1)}.$$

Тогда в силу $(*)$

$$0 \equiv (a-b-c+d)(1-r) \pmod{(r^2+1)}.$$

Заметим, что $r^2+1+(1-r)(r+1) = 2$, а числа $1-r$ и r^2+1 нечетны. Поэтому они взаимно просты, откуда $a-b-c+d \vdots (r^2+1)$. Но

$$\big|(a+d)-(b+c)\big| \leqslant 2(r-1) < 2r < r^2+1.$$

Значит, $a+d = b+c = 24$.

2) Так как $r^n \equiv 1 \pmod{(r-1)}$ при любом натуральном n, из $(*)$ и 1) вытекает, что

$$81 \cdot 16 \equiv 2\,(a+b+c+d) = 96 = 16 \cdot 6 \pmod{(r-1)}.$$

Поскольку $r-1$ нечетно, на $r-1$ делится число $81-6 = 75 = 3 \cdot 5^2$. По условию $r > 9$, то есть для r возможны только значения 16, 26, 76. В случае $r = 16$ с учетом 1)

$$a = 81 \mod 16 = 1 \quad \text{и} \quad d = 24 - a = 23 > r,$$

что невозможно. Если $r = 76$, то $a = 81 \mod 76 = 5$, откуда и старшая цифра x^2 равна 5. Но это невозможно, поскольку $9999^2_{76} < 10^2 \cdot 76^6 < 2 \cdot 76^7$. Значит, $r = 26$. $\square$

Замечание. Если $r = 26$, то в силу 1)

$$a = 81 \mod 26 = 3, \quad d = 24-a = 21 = L_{26}, \quad b = \left(81 \cdot 2 + \left[\tfrac{81}{26}\right]\right) \mod 26 = 9, \quad c = 24-b = 15 = F_{26}.$$

Равенство $9999^2_{26} = 39FLLF93_{26}$ проверяется прямым вычислением.

5. *Дана квадратная таблица* 2021×2021. *Каждая ее клетка окрашена в один из n цветов. Известно, что для любых четырех клеток одного цвета, расположенных в одном столбце, справа от верхней из них и слева от нижней из них нет клеток того же цвета. При каком наименьшем n такое возможно?*

Ответ: 506.

Решение. Рассмотрим какой-то конкретный цвет (скажем, синий). В каждом столбце три нижние синие клетки отметим крестиком, остальные — ноликом (если синих клеток в столбце меньше четырех, то крестиком помечаем все клетки). Заметим, что в любой строке есть не более одной синей клетки с ноликом (в противном случае для самой левой из них нарушается условие задачи). Значит, всего имеется не больше 2021 синих клеток с ноликом. Кроме того, число синих клеток с крестиком не больше, чем $3 \cdot 2021$. Таким образом, общее количество синих клеток не

превосходит $2021 + 3 \cdot 2021 = 4 \cdot 2021$. Эти рассуждения справедливы для любого цвета. Поэтому общее число цветов не меньше, чем

$$\frac{2021^2}{4 \cdot 2021} = \frac{2021}{4} = 505,25.$$

Значит, $n \geqslant 506$.

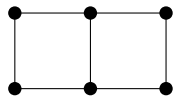
Покажем, что $n = 506$ реализуется. Последовательно занумеруем снизу вверх все диагонали, идущие с северо-запада на юго-восток, числами от 1 до 4041. Первые четыре диагонали покрасим в первый цвет, следующие четыре — во второй, и так далее по циклу (то есть за 506-м цветом снова будет следовать первый). Проверим, что эта раскраска удовлетворяет условию задачи. Заметим, что ни один цвет не используется более двух раз, поскольку $506 \cdot 4 \cdot 2 = 4048 > 4041$. Пусть k-й цвет встретился два раза. В первом блоке самая верхняя клетка этого цвета окажется в строке с номером $4k$. Во втором блоке самая нижняя клетка этого цвета находится в строке с номером

$$4\,(506 + k - 1) + 1 - 2020 = 4k + 1.$$

Значит, клетки одного цвета из разных блоков не могут оказаться в одной строке. $\square$

Вариант 4

1. *На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Таня выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:*
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма a^2+b^2 должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа a^2+b^2 и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1. При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ответ: $n = 65$.

Решение. Сделаем вначале три замечания.

1) *n нечетно.* Действительно, пусть n четно. Среди шести чисел всегда есть три числа одной четности, и по условию они должны быть попарно соединены. Но на картинке нет циклов длины 3.

2) *Если d — делитель n, то не более двух чисел кратны d.* Пусть нашлось три таких числа. Тогда они должны быть попарно соединены и, значит, образуют трехзвенный цикл.

3) *Если q — простой делитель n, а в цепочке (a,b,c,d) последовательно соединенных чисел сумма квадратов любой пары соседних чисел кратна q, то (a,b,c,d) образует цикл.* Действительно,

$$a^2+d^2 = \left(a^2+b^2\right) - \left(b^2+c^2\right) + \left(c^2+d^2\right) \ \vdots\ q.$$

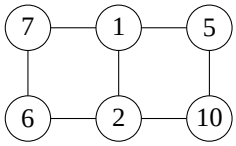
то есть числа a и d тоже соединены.

Из 1) и 3) вытекает, что число n имеет по крайней мере два различных нечетных простых делителя. Пусть их ровно два (скажем, p и q). Покажем, что они отличны от 3, 7, 11. Допустим, например, что $p \in \{3,7,11\}$. Заметим, что для любого натурального a

$$a^2 \bmod 3 \in \{0,1\}, \quad a^2 \bmod 7 \in \{0,1,2,4\}, \quad a^2 \bmod 11 \in \{0,1,3,4,5,9\}.$$

Поэтому a^2+b^2 кратно p тогда и только тогда, когда на p делятся a^2 и b^2, а значит, a и b. В силу 2) этому условию может удовлетворять лишь одна пара. Из остальных шести пар соединенных чисел можно составить трехзвенную нециклическую цепочку (например, проходящую по левой и верхней или по правой и нижней сторонам большого прямоугольника). В этой цепочке сумма квадратов каждой пары соседних чисел кратна q, что противоречит 3).

Таким образом, если n имеет ровно два различных нечетных простых делителя, то $n \geqslant 5\cdot 13 = 65$. Если же таких делителей больше двух, то $n \geqslant 3\cdot 5\cdot 7 = 105 > 65$. Расстановка для $n = 65$ приведена на рисунке. $\square$



2. *При $x,y,z \in (0,1]$ найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{\sqrt{8x^4+y}+\sqrt{8y^4+z}+\sqrt{8z^4+x}-3}{x+y+z}.$$

Ответ: 2.

Решение. Заметим, что при $x, y \in (0, 1]$

$$\sqrt{8x^4 + y} - 1 = \sqrt{4x^4 + 4x^4 + y} - 1 \leqslant \sqrt{4x^2 + 4x + 1} - 1 = 2x.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\sqrt{3y^4 + z} - 1 \leqslant 2y, \quad \sqrt{3z^4 + x} - 1 \leqslant 2z.$$

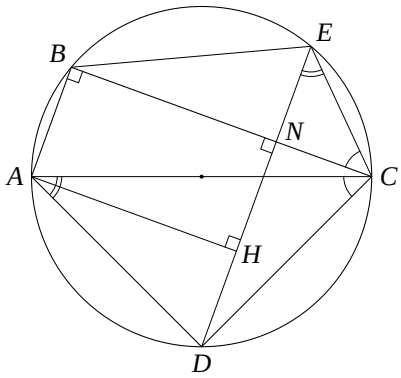
Поэтому

$$A \leqslant \frac{2x + 2y + 2z}{x + y + z} = 2.$$

Равенство реализуется при $x = y = z = 1$. $\square$

3. *Диагональ AC вписанного четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной вокруг него окружности ω. Из точки D провели прямую, перпендикулярную отрезку BC, она вторично пересекла окружность ω в точке E. Найдите отношение площадей треугольника BCD и четырехугольника $ABEC$.*

Ответ: 1.



Решение. Пусть N — точка пересечения BC и DE, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую DE. По условию AC — диаметр окружности. Тогда $\angle ABC = 90°$, откуда $AB \parallel DE$. Кроме того, $\angle ADC = 90°$ и

$$\angle ACD = 90° - \angle DAC = 90° - \angle DEC = 90° - \angle NEC = \angle ECB,$$

откуда $AD = BE$. Значит, $DABE$ — равнобедренная трапеция, и

$$DN = DE - EN = DE - DH = EH.$$

Осталось заметить, что

$$2 \cdot S_{ABEC} = BC \cdot EN + BC \cdot AB = BC \cdot EH = BC \cdot DN = 2 \cdot S_{BCD}. \quad \square$$

4. *На доске написано число 5555 в системе счисления с четным основанием r ($r \geqslant 18$). Петя выяснил, что r-ичная запись x^2 представляет собой восьмизначный палиндром, у которого разность четвертой и третьей цифр равна 2. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?*

Ответ: $r = 24$.

Решение. Договоримся писать $u \equiv v \pmod{w}$, если $(u-v) \vdots w$. По условию существуют такие r-ичные цифры a, b, c, d, что $d - c = 2$ и

$$25\,(r+1)^2(r^2+1)^2 = a\,(r^7+1) + b\,(r^6+r) + c\,(r^5+r^2) + d\,(r^4+r^3). \qquad (*)$$

Сделаем некоторые наблюдения.

1) Так как $r^6 \equiv -1 \pmod{(r^2+1)}$, справедливы равенства

$$r^7+1 \equiv 1-r \pmod{(r^2+1)} \quad \text{и} \quad r^6+r \equiv r-1 \pmod{(r^2+1)}.$$

Кроме того, $r^4 \equiv 1 \pmod{(r^2+1)}$, откуда

$$r^5+r^2 \equiv r-1 \pmod{(r^2+1)} \quad \text{и} \quad r^4+r^3 \equiv 1-r \pmod{(r^2+1)}.$$

Тогда в силу $(*)$

$$0 \equiv (a-b-c+d)(1-r) \pmod{(r^2+1)}.$$

Заметим, что $r^2+1+(1-r)(r+1) = 2$, а числа $1-r$ и r^2+1 нечетны. Значит, они взаимно просты, откуда $a-b-c+d \vdots (r^2+1)$. Но

$$|a-b-c+d| \leqslant 2(r-1) < 2r < r^2+1.$$

Значит, $b-a = d-c = 2$.

2) Так как $r^n \equiv 1 \pmod{(r-1)}$ при любом натуральном n, из $(*)$ и 1) вытекает, что

$$25 \cdot 16 \equiv 2\,(a+b+c+d) = 4\,(b+c) \pmod{(r-1)}.$$

Поскольку $r-1$ нечетно, на $r-1$ делится число $100-(b+c)$.

3) При любом натуральном n

$$r^n = (r+1-1)^n \equiv (-1)^n\,\big(1-n(r+1)\big) \pmod{(r+1)^2}.$$

Правая часть $(*)$ кратна $(r+1)^2$, откуда

$$0 \equiv (7a-5b+3c-d)(r+1) \pmod{(r+1)^2}.$$

Значит, на $r+1$ делится число

$$7a-5b+3c-d = 7(b-2)-5b+3c-(c+2) = 2\,(b+c)-16.$$

Тогда $b+c-8 \vdots (r+1)$ ввиду нечетности $r+1$. Поэтому $b+c=8$ или $b+c = 8+r+1$. Во втором случае

$$0 \equiv 92-(r+1) \equiv 90 \pmod{(r-1)}.$$

Так как r четно и $r-1 \geqslant 17$, мы получаем $r = 46$. Тогда $a = 25$ и $b = 27$, что невозможно, так как $b = 50 \mod 46 = 4$. Значит, $b+c = 8$. В силу 2) $92 \vdots (r-1)$, откуда $r = 24$. $\square$

Замечание. Если $b+c = 8$ и $r = 24$, то

$$a = 25 \mod 24 = 1, \quad b = a+2 = 3, \quad c = 8-b = 5, \quad d = c+2 = 7.$$

Равенство $5555_{24}^2 = 13577531_{24}$ проверяется прямым вычислением.

5. *Дана квадратная таблица* 2023×2023. *Каждая ее клетка окрашена в один из* n *цветов. Известно, что для любых шести клеток одного цвета, расположенных в одной строке, сверху от*

самой левой из них и снизу от самой правой из них нет клеток того же цвета. При каком наименьшем n такое возможно?

Ответ: 338.

Решение. Рассмотрим какой-то конкретный цвет (скажем, синий). В каждой строке пять левых синих клеток отметим крестиком, остальные — ноликом (если синих клеток в строке меньше шести, то крестиком помечаем все клетки). Заметим, что в любом столбце есть не более одной синей клетки с ноликом (в противном случае для самой верхней из них нарушается условие задачи). Значит, всего имеется не больше 2023 синих клеток с ноликом. Кроме того, число синих клеток с крестиком не больше, чем $5 \cdot 2023$. Таким образом, общее количество синих клеток не превосходит $2023 + 5 \cdot 2023 = 6 \cdot 2023$. Эти рассуждения справедливы для любого цвета. Поэтому общее число цветов не меньше, чем

$$\frac{2023^2}{6 \cdot 2023} = \frac{2023}{6} = 337\tfrac{1}{6}\,.$$

Значит, $n \geqslant 338$.

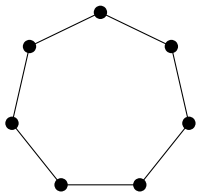
Покажем, что $n = 338$ реализуется. Последовательно занумеруем сверху вниз все диагонали, идущие с юго-запада на северо-восток, числами от 1 до 4045. Первые шесть диагоналей покрасим в первый цвет, следующие шесть — во второй, и так далее по циклу (то есть за 338-м цветом снова будет следовать первый). Проверим, что эта раскраска удовлетворяет условию задачи. Заметим, что ни один цвет не используется более двух раз, поскольку $338 \cdot 6 \cdot 2 = 4056 > 4045$. Пусть k-й цвет встретился два раза. В первом блоке самая правая клетка этого цвета окажется в столбце с номером $6k$. Во втором блоке самая левая клетка этого цвета находится в столбце с номером

$$6\,(338 + k - 1) + 1 - 2022 = 6k + 1.$$

Значит, клетки одного цвета из разных блоков не могут оказаться в одном столбце. $\square$

Вариант 5

1. *На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Настя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:*
если числа a и b не соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1. При каком наименьшем n существует такая расстановка?



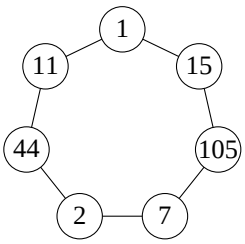
Ответ: $n = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$.

Решение. Сделаем два замечания.

1) *n не делится на 2 и 3.* Среди семи чисел всегда есть три числа одной четности. Если n четно, то они должны быть попарно соединены. Кроме того, среди семи чисел найдутся три числа, дающие одинаковые остатки при делении на 3. Если n кратно 3, то эти числа тоже образуют трехзвенный цикл. Но таких циклов на картинке нет.

2) *Если p — простой делитель n, то среди трех последовательно соединенных чисел существует пара соседних, разность которых не кратна p.* Пусть (a, b, c) — цепочка последовательно соединенных чисел, в которой $a-b$ и $b-c$ кратны p. Тогда $a-c = (a-b)+(b-c) \,\vdots\, p$. Значит, (a, b, c) образует трехзвенный цикл, что невозможно.

Покажем, что число n имеет не менее трех различных простых делителей. Пусть p — простой делитель n. Имеется не более трех различных пар (a, b), для которых $a-b \,\vdots\, p$. Если бы таких пар было 4, то какие-то две из них пересекались бы, что противоречит 2). Но всего отрезками соединено 7 пар чисел, поэтому n имеет не менее трех различных простых делителей. В силу 1) минимально возможные значения для них — 5, 7, 11, то есть $n \geqslant 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$. Расстановка для $n = 385$ приведена на рисунке. $\square$



2. *При $x, y \in (0, 1]$ найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{(x^2-y)\sqrt{y+x^3-xy} + (y^2-x)\sqrt{x+y^3-xy} + 1}{(x-y)^2+1}.$$

Ответ: 1.

Решение. Заметим, что

$$y + x^3 - xy - x^2 = \big(y - x^2\big)(1-x).$$

Если $y \geqslant x^2$, то

$$\sqrt{y+x^3-xy} \geqslant x \quad \text{и} \quad (x^2-y)\left(\sqrt{y+x^3-xy} - x\right) \leqslant 0,$$

а при $y < x^2$

$$\sqrt{y + x^3 - xy} \leqslant x \quad \text{и} \quad (x^2 - y)\left(\sqrt{y + x^3 - xy} - x\right) \leqslant 0.$$

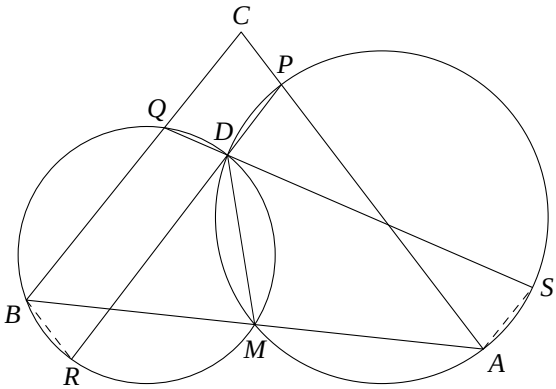
В обоих случаях справедливо неравенство $(x^2 - y)\sqrt{y + x^3 - xy} \leqslant x^3 - xy$. Оценивая аналогичным образом второе слагаемое в числителе A, мы получим

$$A \leqslant \frac{x^3 + y^3 - 2xy + 1}{(x-y)^2 + 1} \leqslant \frac{x^2 + y^2 - 2xy + 1}{(x-y)^2 + 1} = 1.$$

Равенство реализуется при $x = y = 1$. $\square$

3. *На стороне AB остроугольного треугольника ABC отмечена точка M. Внутри треугольника выбрана точка D. Окружности ω_A и ω_B описаны вокруг треугольников AMD и BMD соответственно. Сторона AC вторично пересекает окружность ω_A в точке P, а сторона BC вторично пересекает окружность ω_B в точке Q. Луч PD вторично пересекает окружность ω_B в точке R, а луч QD вторично пересекает окружность ω_A в точке S. Найдите отношение площадей треугольников ACR и BCS.*

   Ответ: 1.



   Решение. Заметим, что

$$\angle PAM = 180^\circ - \angle PDM = \angle RDM = \angle RBM,$$

откуда $BR \parallel AC$. Значит, расстояния от точек B и R до прямой AC одинаковы. Тогда треугольники ABC и ACR имеют общее основание AC и одинаковые высоты, опущенные на AC. Поэтому площади этих треугольников равны. Кроме того,

$$\angle QBM = 180^\circ - \angle QDM = \angle MDS = 180^\circ - \angle MAS,$$

откуда $AS \parallel BC$. Значит, расстояния от точек A и S до прямой BC одинаковы. Тогда треугольники ABC и BCS имеют общее основание BC и одинаковые высоты, опущенные на BC. Поэтому площади этих треугольников тоже равны. В результате получаем $S_{ACR} = S_{ABC} = S_{BCS}$. $\square$

4. *В системе счисления с основанием r ($r \leqslant 100$) натуральное число x является двузначным с одинаковыми цифрами. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 четырехзначная, причем крайние цифры одинаковы, а средние равны нулю. При каких r такое возможно?*

   Ответ: $r = 2$ или $r = 23$.

   Решение. Запишем условие в виде $a^2(1+r)^2 = b\,(1+r^3)$, где a, b — r-ичные цифры. Сокращая на $1+r$, мы получим

$$a^2(1+r) = b\,(1 - r + r^2) = b\,\big((1+r)(r-2) + 3\big). \qquad (*)$$

Заметим, что НОД $\big(1+r, (1+r)(r-2)+3\big)$ равен 1 или 3. В первом случае $b \,\vdots\, (r+1)$, что невозможно, так как $0 < b \leqslant r-1$. Значит, $(1+r) \,\vdots\, 3$ и $b \,\vdots\, \dfrac{1+r}{3}$. Тогда $b = \dfrac{k\,(1+r)}{3}$, где k равно 1 или 2. Положим $1+r = 3s$. В силу $(*)$

$$3a^2 s = ks\big(3s\,(3s-3)+3\big) \Longleftrightarrow a^2 = k\big(3s\,(s-1)+1\big).$$

Так как $s\,(s-1)$ четно, при $k=2$ мы получим $a^2 \mod 4 = 2$, что невозможно. Значит, $k=1$ и

$$4a^2 = 3\,(4s^2-4s)+4 = 3\,(2s-1)^2+1 \Longleftrightarrow (2a-1)(2a+1) = 3\,(2s-1)^2.$$

Числа $2a-1$ и $2a+1$ взаимно просты, поскольку они нечетны и различаются на 2. Кроме того, одно из этих чисел кратно 3. Значит, $\dfrac{2a-1}{3}$ и $2a+1$ или $\dfrac{2a+1}{3}$ и $2a-1$ — точные квадраты. Рассмотрим два случая.

1) $2a-1 = 3m^2$. Тогда число $3m^2+2$ будет точным квадратом. Но это невозможно, так как $(3m^2+2) \mod 3 = 2$, а остаток от деления на 3 квадрата натурального числа может быть равен только 0 или 1.

2) $2a+1 = 3m^2$. Так как число $2a+1$ нечетно и не превосходит 199, для него возможны значения $3, 27, 75, 147$. В первом случае

$$m=1,\ \ a=1,\ \ 2a-1=1,\ \ 2s-1 = m\sqrt{2a-1} = 1,\ \ s=1,\ \ r=3s-1=2,\ \ b=1,$$

что удовлетворяет условию, поскольку $11_2^2 = 1001_2$. Во втором случае

$$m=3,\ \ a=13,\ \ 2a-1=25,\ \ 2s-1 = m\sqrt{2a-1} = 15,\ \ s=8,\ \ r=3s-1=23,\ \ b=8,$$

что удовлетворяет условию, так как $DD_{23}^2 = 8008_{23}$. Таким образом, $r=2$ и $r=23$ нам подходят. Два последних значения не годятся, поскольку $2a-1$ будет равно 73 или 145, а эти числа не являются точными квадратами. $\square$

5. *У параллелепипеда $a \times b \times c$ грани разбиты на единичные клетки. Имеется также большое количество трехклеточных полосок, которые можно перегибать по границам клеток. При каких a, b и c три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, можно полностью обклеить полосками без наложений и зазоров так, чтобы клетки граней и полосок совпадали?*

Ответ: из чисел a, b, c не менее двух делятся на 3.

Решение. Пусть у параллелепипеда хотя бы два измерения делятся на 3. Тогда у любой грани параллелепипеда есть сторона, кратная 3. Значит, мы можем полностью обклеить грань полосками, накладывая их параллельно этой стороне и не задевая других граней. Поэтому такая ситуация удовлетворяет условию задачи.

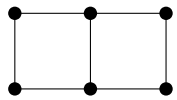
Пусть теперь на 3 делится менее двух измерений параллелепипеда. Покажем, что обклеить параллелепипед требуемым образом не удастся. Рассмотрим два случая.

1) *Ровно одно измерение параллелепипеда кратно 3.* Пусть, например, a делится на 3, а b и c — нет. Общее число клеток на трех выделенных гранях равно $ab+bc+ca$, и оно не кратно 3 (крайние слагаемые делятся на 3, среднее — нет). Поэтому полностью обклеить эти грани трехклеточными полосками невозможно.

2) *Ни одно из чисел a, b, c не делится на 3.* Пронумеруем строки и столбцы на трех выделенных гранях, начиная от ребер, общих с другими выделенными гранями. Покрасим в черный цвет строки и столбцы с номерами $2, 5, 8, \ldots$, а остальные клетки — в белый цвет. Тогда на каждой грани белыми будут угловой квадратик 1×1, а также некоторое количество прямоугольников 2×1 и квадратов 2×2. Значит, число белых клеток на каждой грани нечетно. Поэтому нечетным будет и общее количество белых клеток. С другой стороны, любая трехклеточная полоска покрывает четное число белых клеток. Тогда общее количество белых клеток должно быть четным. Полученное противоречие доказывает, что случай 2) также невозможен. $\square$

Вариант 6

1. *На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Настя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:*
если числа a и b не соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1. При каком наименьшем n существует такая расстановка?



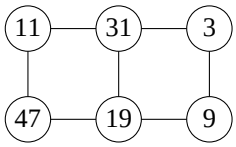
Ответ: $n = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Решение. Сделаем два замечания.

1) *n нечетно.* Действительно, пусть n четно. Среди шести чисел всегда есть три числа одной четности, и по условию они должны быть попарно соединены. Но на картинке нет циклов длины 3.

2) *Если p — простой делитель n, то среди трех последовательно соединенных чисел существует пара соседних, разность которых не кратна p.* Пусть (a, b, c) — цепочка последовательно соединенных чисел, в которой $a-b$ и $b-c$ кратны p. Тогда $a-c = (a-b)+(b-c) \,\vdots\, p$. Значит, (a, b, c) образует трехзвенный цикл, что невозможно.

Покажем, что число n имеет не менее трех различных простых делителей. Пусть p — простой делитель n. Имеется не более трех различных пар (a, b), для которых $a-b \,\vdots\, p$. Если бы таких пар было 4, то какие-то две из них пересекались бы, что противоречит 2). Но всего отрезками соединено 7 пар чисел, поэтому n имеет не менее трех различных простых делителей. В силу 1) минимально возможные значения для них — 3, 5, 7, то есть $n \geqslant 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Расстановка для $n = 105$ приведена на рисунке. $\square$



2. *При $x, y \in [1, 3]$ найдите минимальное значение выражения*

$$A = \frac{\left(3xy + x^2\right)\sqrt{3xy + x - 3y} + \left(3xy + y^2\right)\sqrt{3xy + y - 3x}}{x^2y + y^2x}.$$

Ответ: 4.

Решение. Заметим, что

$$3xy + x - 3y - x^2 = (3y - x)(x - 1) \geqslant 0,$$

поскольку $x \geqslant 1$ и $x \leqslant 3 \leqslant 3y$. Тогда

$$\left(3xy + x^2\right)\sqrt{3xy + x - 3y} \geqslant 3x^2y + x^3 \quad \text{и, аналогично,} \quad \left(3xy + y^2\right)\sqrt{3xy + y - 3x} \geqslant 3y^2x + y^3.$$

Кроме того, по неравенству Коши

$$x^2y + y^2x = xy\,(x + y) \leqslant \tfrac{1}{4}\,(x + y)^3.$$

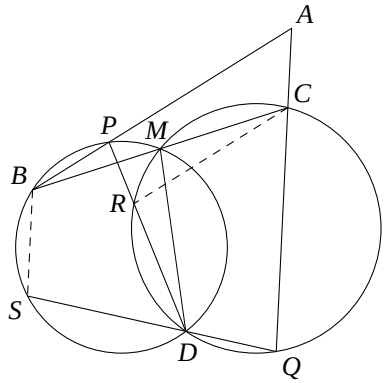
Поэтому

$$A \geqslant \frac{3xy\,(x + y) + x^3 + y^3}{\frac{1}{4}\,(x + y)^3} = 4 \cdot \frac{(x + y)^3}{(x + y)^3} = 4.$$

Равенство реализуется при $x = y = 1$. $\square$

3. *На стороне BC треугольника ABC с тупым углом C отмечена точка M. Точка D выбрана так, что треугольник BCD остроугольный, а точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC. Окружности ω_B и ω_C описаны вокруг треугольников BMD и CMD соответственно. Сторона AB вторично пересекает окружность ω_B в точке P, а луч AC вторично пересекает окружность ω_C в точке Q. Отрезок PD вторично пересекает окружность ω_C в точке R, а луч QD вторично пересекает окружность ω_B в точке S. Найдите отношение площадей треугольников ABR и ACS.*

   Ответ: 1.



   Решение. Заметим, что

$$\angle SBM = 180^\circ - \angle SDM = \angle MDQ = 180^\circ - \angle MCQ,$$

откуда $SB \parallel AC$. Значит, расстояния от точек B и S до прямой AC одинаковы. Тогда треугольники ABC и ASC имеют общее основание AC и равные высоты, опущенные на AC. Поэтому площади этих треугольников равны. Кроме того,

$$\angle PBM = \angle PDM = \angle RDM = \angle RCM,$$

откуда $BP \parallel RC$. Значит, расстояния от точек R и C до прямой AB одинаковы. Тогда треугольники ABC и ABR имеют общее основание AB и равные высоты, опущенные на AB. Поэтому площади этих треугольников тоже равны. В результате получаем $S_{ASC} = S_{ABC} = S_{ABR}$. $\square$

4. *Запись натурального числа x в системе счисления с основанием 23 состоит из $2m$ одинаковых цифр. Оказалось, что в 23-ичной записи числа x^2 крайние цифры одинаковы, а остальные $4m-2$ цифры равны нулю. Найдите все такие числа x. Ответ дайте в 23-ичной системе счисления. (Цифры от 10 до 22 обозначаются латинскими буквами от A до M.)*

   Ответ: $x = DD_{23}$.

   Решение. Договоримся писать $u \equiv v \pmod{w}$, если $(u - v) \vdots w$. Пусть $n = 2m$. По условию при некоторых 23-ичных цифрах a и b справедливо равенство

$$a^2\left(1 + 23 + 23^2 + \ldots + 23^{n-1}\right)^2 = b\left(1 + 23^{2n-1}\right) \tag{1}$$

или, в другом виде,

$$a^2\left(23^n - 1\right)^2 = 22^2 \cdot b\left(1 + 23^{2n-1}\right). \tag{2}$$

Так как $23^k \equiv (-1)^k \pmod{24}$, а n четно, левая часть (1) кратна 24^2. Значит, на 24^2 делится и правая часть (1). Заметим, что

$$1 + 23^{2n-1} \equiv 1 + (24-1)^{2n-1} \equiv (2n-1) \cdot 24 \pmod{24^2}.$$

Поэтому $b\,(2n-1) \,\vdots\, 24$, откуда $b \,\vdots\, 8$. Тогда $b=8$ или $b=16$. Но

$$1+23^{2n-1} \equiv 1+7^{2n-1} = 1+7\cdot 49^{n-1} \equiv 8 \pmod{16}.$$

Таким образом, число $23^{2n-1}+1$ делится на 8 и не делится на 16, а потому оно не является точным квадратом. Значит, случай $b=16$ невозможен. Подставляя $b=8$ в (2), мы получим

$$a^2\left(1-2\cdot 23^n+23^{2n}\right) = 22^2\cdot 8\cdot\left(1+23^{2n-1}\right) \Longleftrightarrow 23^{2n-1}(23a^2-22^2\cdot 8) = 2a^2\cdot 23^n - a^2 + 22^2\cdot 8.$$

Поскольку правая часть положительна, верно неравенство $23a^2-22^2\cdot 8 \geqslant 1$, откуда

$$23^{2n-1} \leqslant 2a^2\cdot 23^n - a^2 + 22^2\cdot 8 < 2\cdot 22^2\cdot 23^n + 22^2\cdot 8 < 3\cdot 22^2\cdot 23^n \quad \text{и} \quad 23^{n-1} < 3\cdot 22^2.$$

Из четных n этому условию удовлетворяет только $n=2$. Подставим его в (1):

$$24^2\cdot a^2 = 8\left(1+23^3\right) \Longleftrightarrow a^2 = 169 \Longleftrightarrow a = 13 = D_{23}.$$

Осталось заметить, что $DD_{23}^2 = 8008_{23}$. $\square$

5. *У параллелепипеда $a\times b\times c$ грани разбиты на единичные клетки. Имеется также большое количество пятиклеточных полосок, которые можно перегибать по границам клеток. При каких a, b и c три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, можно полностью обклеить полосками без наложений и зазоров так, чтобы клетки граней и полосок совпадали?*

Ответ: из чисел a, b, c не менее двух делятся на 5.

Решение. Пусть у параллелепипеда хотя бы два измерения делятся на 5. Тогда у любой грани параллелепипеда есть сторона, кратная 5. Значит, мы можем полностью обклеить грань полосками, накладывая их параллельно этой стороне и не задевая других граней. Поэтому такая ситуация удовлетворяет условию задачи.

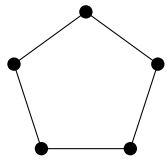
Пусть теперь на 5 делится менее двух измерений параллелепипеда. Покажем, что обклеить параллелепипед требуемым образом не удастся. Рассмотрим два случая.

1) *Ровно одно измерение параллелепипеда кратно 5.* Пусть, например, a делится на 5, а b и c — нет. Общее число клеток на трех выделенных гранях равно $ab+bc+ca$, и оно не кратно 5 (крайние слагаемые делятся на 5, среднее — нет). Поэтому полностью обклеить эти грани пятиклеточными полосками невозможно.

2) *Ни одно из чисел a, b, c не делится на 5.* Пронумеруем строки и столбцы на трех выделенных гранях, начиная от ребер, общих с другими выделенными гранями. Покрасим в черный цвет строки и столбцы с номерами $2, 3, 4,\ 7, 8, 9,\ 12, 13, 14\ldots$, а остальные клетки — в белый цвет. Тогда на каждой грани белыми будут угловой квадратик 1×1, а также некоторое количество прямоугольников 2×1 и квадратов 2×2. Значит, число белых клеток на каждой грани нечетно. Поэтому нечетным будет и общее количество белых клеток. С другой стороны, любая пятиклеточная полоска покрывает четное число белых клеток. Тогда общее количество белых клеток должно быть четным. Полученное противоречие доказывает, что случай 2) также невозможен. $\square$

Вариант 7

1. *На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:*
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ответ: $n = 15$.

Решение. Сделаем два замечания.

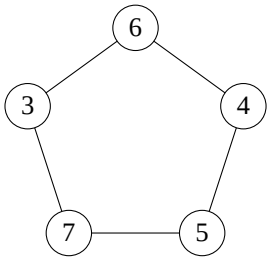
1) *n нечетно.* Действительно, пусть n четно. Среди пяти чисел всегда есть три числа одной четности, и по условию они должны быть попарно соединены. Но на картинке нет циклов длины 3.

2) *n имеет не менее двух различных простых делителей.* Пусть n — степень простого числа p. Возьмем цепочку (a, b, c, d) последовательно соединенных чисел. По условию

$$a + d = (a + b) - (b + c) + (c + d) \ \vdots \ p.$$

Тогда числа a и d тоже соединены, то есть на картинке получился цикл длины 4, которого там нет.

Таким образом, число n имеет по крайней мере два различных нечетных простых делителя, откуда $n \geqslant 15$. Расстановка для $n = 15$ приведена на рисунке. $\square$



2. *При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите минимальное значение выражения*

$$A = \frac{(x+2y)\sqrt{x+y-xy} + (y+2z)\sqrt{y+z-yz} + (z+2x)\sqrt{z+x-zx}}{xy+yz+zx}.$$

Ответ: 3.

Решение. Заметим, что при $x, y \in (0, 1]$

$$\sqrt{x+y-xy} = \sqrt{x+y(1-x)} \geqslant \sqrt{x} \geqslant x.$$

Тогда $(x+2y)\sqrt{x+y-xy} \geqslant x^2 + 2xy$ и, аналогично,

$$(y+2z)\sqrt{y+z-yz} \geqslant y^2 + 2yz, \quad (z+2x)\sqrt{z+x-zx} \geqslant z^2 + 2zx.$$

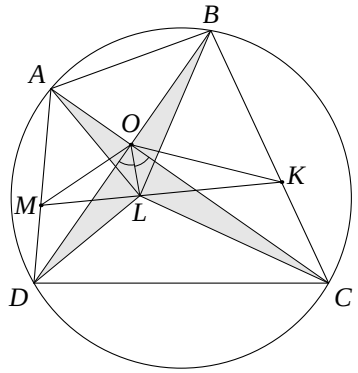
Поэтому

$$A \geqslant \frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}{xy+yz+zx} = \frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} \geqslant 3.$$

Равенство реализуется при $x = y = z = 1$. $\square$

3. *На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно, причем $BK : KC = AM : MD$. На отрезке KM выбрана такая точка L, что $KL : LM = BC : AD$. Найдите отношение площадей треугольников ACL и BDL, если известно, что $AC = p$ и $BD = q$.*

   Ответ: $\frac{p}{q}$.



Решение. Обозначим через O точку пересечения AC и BD. В силу вписанности $ABCD$ треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, откуда $\frac{OC}{OD} = \frac{BC}{AD}$. Кроме того, по условию

$$\frac{KC}{BK} = \frac{MD}{AM} \Longleftrightarrow \frac{KC}{BC} = \frac{MD}{AD} \Longrightarrow \frac{KC}{MD} = \frac{BC}{AD} = \frac{OC}{OD}.$$

Наконец, $\angle KCO = \angle MDO$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу AB. Значит, треугольники KCO и MDO подобны с коэффициентом $\frac{BC}{AD}$. Отсюда $\angle KOC = \angle MOD$ и по условию

$$\frac{OK}{OM} = \frac{BC}{AD} = \frac{KL}{LM}.$$

Поэтому OL — биссектриса треугольника MOK. Тогда

$$\angle COL = \angle KOL - \angle KOC = \angle MOL - \angle MOD = \angle DOL.$$

Значит, точка L равноудалена от прямых AC и BD, то есть одинаковы высоты треугольников ACL и BDL, опущенные из точки L. Таким образом, отношение площадей этих треугольников равно $\frac{AC}{BD} = \frac{p}{q}$. $\square$

4. *Натуральное число x в системе счисления с основанием r ($r > 3$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $q = 2p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с тремя одинаковыми средними цифрами. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?*

   Ответ: $r = 3n^2$, где n — натуральное число, $n > 1$.

   Решение. Договоримся писать $u \equiv v \pmod{w}$, если $(u - v) \vdots w$. Заметим, что

$$x = \overline{ppqq}_r = (pr^2 + q)(r + 1) = p\,(r^2 + 2)(r + 1).$$

Из условия на x^2 вытекает равенство

$$p^2(r^2 + 2)^2(r^2 + 2r + 1) = a\left(1 + r^6\right) + b\left(r + r^5\right) + c\left(r^2 + r^3 + r^4\right), \qquad (*)$$

где a, b, c — некоторые r-ичные цифры. Сделаем несколько наблюдений.

1) При любом натуральном n

$$r^n = (1+r-1)^n \equiv (-1)^n \big(1 - n\,(1+r)\big) \pmod{(1+r)^2}.$$

Правая часть $(*)$ кратна $(1+r)^2$, откуда

$$0 \equiv a\big(2 - 6\,(1+r)\big) - b\big(2 - 6\,(1+r)\big) + c\big(1 - 3\,(1+r)\big) = \big(1 - 3\,(1+r)\big)(2a - 2b + c) \pmod{(1+r)^2}.$$

Поскольку $1 - 3\,(1+r)$ взаимно просто с $(1+r)^2$, на $(1+r)^2$ делится $2a - 2b + c$. Но это число лежит в интервале $(-2r, 3r) \subset \big(-(1+r)^2, (1+r)^2\big)$, откуда $2a = 2b - c$.

2) Приравняем остатки левой и правой частей $(*)$ от деления на $1 + r^2$. В силу 1)

$$2p^2 r \equiv br(1+r^4) + cr^3 \equiv (2b - c)r = 2ar \pmod{(1+r^2)}.$$

Поскольку r взаимно просто с $1 + r^2$, на $1 + r^2$ делится $2\,(p^2 - a)$. Но

$$2\,(p^2 - a) < 2p^2 < q^2 < r^2 < 1 + r^2, \quad 2\,(p^2 - a) > -2a > -2r > -1 - r^2.$$

Таким образом, $a = p^2$.

3) Приравняем остатки левой и правой частей $(*)$ от деления на r:

$$4p^2 \equiv a \pmod{r} \Longleftrightarrow 4a \equiv a \pmod{r} \Longleftrightarrow 3a \,\vdots\, r \Longleftrightarrow 3a = r \text{ или } 3a = 2r,$$

поскольку $3a < 3r$. Тогда в силу 2) $r = 3p^2$ или $r = \frac{3p^2}{2}$. Во втором случае

$$x^2 > p^2\big(r^6 + 2r^5\big) = r^6\left(p^2 + \frac{2p^2}{r}\right) = r^6\left(p^2 + \frac{4}{3}\right) > r^6\big(p^2 + 1\big).$$

Поэтому старшая цифра x^2 больше p^2, а младшая в силу $(*)$ равна p^2. Значит, x^2 не является палиндромом и $r = \frac{3p^2}{2}$ нам не подходит.

Пусть теперь $r = 3p^2$. Покажем, что x^2 будет палиндромом требуемого вида при любом $p > 1$. Раскроем скобки в левой части $(*)$:

$$\begin{aligned} x^2 &= p^2\,(r^4 + 4r^2 + 4)(r^2 + 2r + 1) = 4p^2 + 8p^2 r + 8p^2 r^2 + 8p^2 r^3 + 5p^2 r^4 + 2p^2 r^5 + p^2 r^6 = \\ &= p^2 + (2p^2 + 1)\,r + (2p^2 + 2)\,r^2 + (2p^2 + 2)\,r^3 + (2p^2 + 2)\,r^4 + (2p^2 + 1)\,r^5 + p^2 r^6 \end{aligned}$$

(в последней строке слагаемые перегруппированы с учетом равенства $3p^2 = r$). Коэффициенты при степенях r являются r-ичными цифрами x^2, поскольку все они не превосходят $2p^2 + 2 = r + 2 - p^2 < r$. Эти цифры, очевидно, удовлетворяют условию задачи. $\square$

5. *Доска $m \times n$ $(m, n > 5)$ разрезана на фигурки из шести единичных квадратиков вида*  *(фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?*

Ответ: при всех m и n, среди которых имеется и кратное 3, и кратное 4.

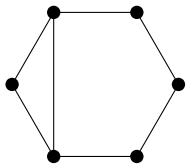
Решение. Предположим, что доску $m \times n$ можно разрезать требуемым образом. Поскольку в каждой фигурке шесть клеток, общее количество клеток на доске кратно 6. Тогда среди m и n имеется четное число (пусть для определенности это m). Кроме того, одно из этих чисел кратно 3. Покажем, что m или n делится также на 4. Пусть это не так. Проведем горизонтальные и вертикальные линии с шагом в две клетки, начиная с верхнего и левого краев доски соответственно. Они разобьют доску на квадраты 2×2 и, возможно, некоторое количество прямоугольников 2×1

(которые появятся только при нечетном n). Раскрасим эти квадраты и прямоугольники в шахматном порядке в белый и черный цвета. Пусть в полоске $2 \times n$, отсекаемой двумя соседними линиями, имеется p белых и q черных клеток. Тогда $p \neq q$, поскольку n не делится на 4. В соседней полоске $2 \times n$ будет, наоборот, q белых и p черных клеток. Значит, суммарное количество белых и черных клеток в объединении этих двух полосок одинаковое. Но общее число полосок $2 \times n$ нечетно, так как m не делится на 4. Поэтому на всей доске белых и черных клеток поровну быть не может. С другой стороны, в каждой шестиклеточной фигурке черных и белых клеток будет поровну, а тогда это должно быть верно и для всей доски. Полученное противоречие доказывает, что среди m и n есть число, кратное 4.

Если $n \vdots 3$ и $m \vdots 4$, то разрежем доску на прямоугольники 4×3, а каждый из них разобьем на две фигурки. Пусть один из размеров кратен 12 (скажем, m). Произвольное число $n > 5$ можно представить в виде $3i+4j$ с некоторыми неотрицательными целыми i и j. Действительно, при $n \vdots 3$ это очевидно, а в противном случае на 3 делится $n-4$ или $n-8$. Поэтому доску можно разбить на i прямоугольников $m \times 3$ и j прямоугольников $m \times 4$, каждый из которых затем разрезается на прямоугольники со сторонами 3 и 4. $\square$

Вариант 8

1. *На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:*
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ответ: $n = 15$.

Решение. Сделаем два замечания.

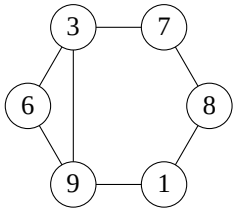
1) *n нечетно.* Действительно, пусть n четно. Если четных и нечетных чисел по три, то каждая из этих троек образует цикл. Пусть имеется четыре числа a, b, c, d одной четности. Тогда все они попарно соединены, и мы снова получаем два трехзвенных цикла — например, (a, b, c) и (a, d, c). Но на картинке такой цикл всего один.

2) *n имеет не менее двух различных простых делителей.* Пусть n — степень простого числа p. Возьмем цепочку (a, b, c, d) последовательно соединенных чисел. По условию

$$a + d = (a + b) - (b + c) + (c + d) \ \vdots \ p.$$

Тогда числа a и d тоже соединены, то есть на картинке получился цикл длины 4, которого там нет.

Таким образом, число n имеет по крайней мере два различных нечетных простых делителя, откуда $n \geqslant 15$. Расстановка для $n = 15$ приведена на рисунке. $\square$



2. *При $x, y, z > 0$ найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{(x-y)\sqrt{x^2+y^2} + (y-z)\sqrt{y^2+z^2} + (z-x)\sqrt{z^2+x^2} + \sqrt{2}}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + 2}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Если $x \geqslant y$, то

$$\sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2} \quad \text{и} \quad (x-y)\sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{2}\,(x^2 - xy),$$

а при $x < y$

$$\sqrt{x^2+y^2} > \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2} \quad \text{и} \quad (x-y)\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{2}\,(x^2 - xy).$$

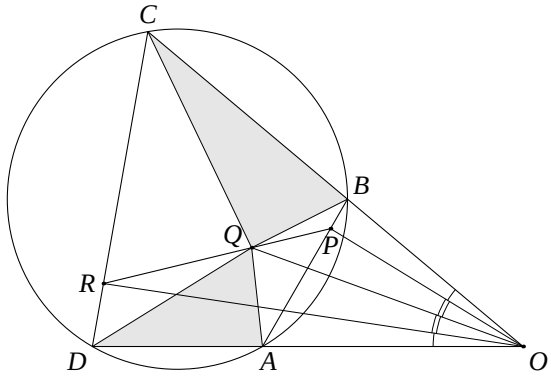
В обоих случаях справедливо неравенство $(x-y)\sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{2}\,(x^2 - xy)$. Оценивая аналогичным образом два других слагаемых в числителе A, мы получим

$$A \leqslant \sqrt{2} \cdot \frac{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx+1}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+2}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Равенство реализуется при $x = y = z = 1$. $\square$

3. *На сторонах AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$, не являющегося трапецией, отмечены точки P и R соответственно, причем $AP : PB = CR : RD$. На отрезке PR выбрана такая точка Q, что $PQ : QR = AB : CD$. Найдите отношение площадей треугольников AQD и BQC, если известно, что $AD = x$ и $BC = y$.*

   Ответ: $\frac{x}{y}$.



Решение. Обозначим через O точку пересечения прямых DA и CB. Будем для определенности считать, что она лежит на лучах DA и CB. В силу вписанности $ABCD$ треугольники AOB и COD подобны по двум углам, откуда $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$. Кроме того, по условию

$$\frac{PB}{AP} = \frac{RD}{CR} \Longleftrightarrow \frac{PB}{AB} = \frac{RD}{CD} \Longrightarrow \frac{PB}{RD} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}.$$

Наконец, $\angle ODR = 180^\circ - \angle CBP = \angle PBO$. Значит, треугольники OBP и ODR подобны с коэффициентом $\frac{AB}{CD}$. Отсюда $\angle BOP = \angle DOR$ и по условию

$$\frac{OP}{OR} = \frac{AB}{CD} = \frac{PQ}{QR}.$$

Поэтому OQ — биссектриса треугольника POR. Тогда

$$\angle DOQ = \angle DOR + \angle QOR = \angle POQ + \angle BOP = \angle BOQ.$$

Значит, точка Q равноудалена от прямых AD и BC, то есть одинаковы высоты треугольников AQD и BQC, опущенные из точки Q. Таким образом, отношение площадей этих треугольников равно $\frac{AD}{BC} = \frac{x}{y}$. $\square$

4. *Запись натурального числа x в системе счисления с основанием r ($r \leqslant 70$) получается n-кратным повторением некоторой пары цифр, где n — натуральное число. Оказалось, что r-ичная запись x^2 состоит из $4n$ единиц. Найдите все пары (r, x), при которых такое возможно.*

   Ответ: $(7, 26_7)$.

   Решение. Пусть $x = \overline{ab\ldots ab}_r$. Положим $y = \overline{ab}_r$ и запишем условие в виде

$$y^2\big(1 + r^2 + \ldots + r^{2(n-1)}\big)^2 = 1 + r + \ldots + r^{4n-1} \Longleftrightarrow y^2 \cdot \frac{(r^{2n}-1)^2}{(r^2-1)^2} = \frac{r^{4n}-1}{r-1} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow y^2(r^{2n}-1) = (r+1)(r^2-1)(r^{2n}+1).$$

Отсюда вытекает, что $y^2 \mod r = 1$, а также равенство

$$r^{2n}\big(y^2 - (r+1)(r^2-1)\big) = y^2 + (r+1)(r^2-1).$$

Тогда $y^2-(r+1)(r^2-1)>0$ и

$$\big(y^2-(r+1)(r^2-1)\big) \mod r = (y^2+1) \mod r = 2 \mod r \neq 1.$$

Поэтому $y^2-(r+1)(r^2-1)\geqslant 2$ и

$$2r^{2n}\leqslant (r+1)(r^2-1)+y^2\leqslant (r+1)(r^2-1)+(r^2-1)^2=(r^2-1)(r^2+r)<2r^4,$$

что возможно лишь при $n=1$. Таким образом,

$$(ar+b)^2=(r+1)(r^2+1).$$

Заметим, что числа $r+1$ и r^2+1 не могут быть взаимно простыми, иначе r^2+1 окажется точным квадратом. Тогда из равенства $r^2+1=(r+1)(r-1)+2$ вытекает, что их наибольший общий делитель равен 2. Поэтому r нечетно и

$$\left(\frac{ar+b}{2}\right)^2=\frac{r+1}{2}\cdot\frac{r^2+1}{2}.$$

Дроби в правой части взаимно просты и потому должны быть точными квадратами. В частности, $r=2k^2-1$, и условию $r\leqslant 70$ удовлетворяют только $r\in\{7,17,31,49\}$. Последние три варианта не подходят, поскольку числа $\frac{17^2+1}{2}=145$, $\frac{31^2+1}{2}=481$ и $\frac{49^2+1}{2}=1201$ не являются точными квадратами. Пусть $r=7$. Тогда

$$y=ar+b=\sqrt{(r+1)(r^2+1)}=\sqrt{8\cdot 50}=20=26_7,$$

откуда $a=2$ и $b=6$. Это нам подходит, поскольку

$$26_7^2=(30_7-1)^2=1200_7-60_7+1=1111_7. \quad \square$$

5. *Доска $m\times n$ $(m,n>15)$ разрезана на фигурки из десяти единичных квадратиков вида*  *(фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?*

Ответ: при всех m и n, среди которых имеется и кратное 4, и кратное 5.

Решение. Предположим, что доску $m\times n$ можно разрезать требуемым образом. Поскольку в каждой фигурке десять клеток, общее количество клеток на доске кратно 10. Тогда среди m и n имеется четное число (пусть для определенности это m). Кроме того, одно из этих чисел кратно 5. Покажем, что m или n делится также на 4. Пусть это не так. Проведем горизонтальные и вертикальные линии с шагом в две клетки, начиная с верхнего и левого краев доски соответственно. Они разобьют доску на квадраты 2×2 и, возможно, некоторое количество прямоугольников 2×1 (которые появятся только при нечетном n). Раскрасим эти квадраты и прямоугольники в шахматном порядке в белый и черный цвета. Пусть в полоске $2\times n$, отсекаемой двумя соседними линиями, имеется p белых и q черных клеток. Тогда $p\neq q$, поскольку n не делится на 4. В соседней полоске $2\times n$ будет, наоборот, q белых и p черных клеток. Значит, суммарное количество белых и черных клеток в объединении этих двух полосок одинаковое. Но общее число полосок $2\times n$ нечетно, так как m не делится на 4. Поэтому на всей доске белых и черных клеток поровну быть не может. С другой стороны, в каждой десятиклеточной фигурке черных и белых клеток будет поровну, а тогда это должно быть верно и для всей доски. Полученное противоречие доказывает, что среди m и n есть число, кратное 4.

Если $n\ \vdots\ 5$ и $m\ \vdots\ 4$, то разрежем доску на прямоугольники 4×5, а каждый из них разобьем на две фигурки. Пусть один из размеров кратен 20 (скажем, m). Произвольное число $n>15$ можно представить в виде $5i+4j$ с некоторыми неотрицательными целыми i и j. Действительно, числа n, $n-5$, $n-10$, $n-15$ дают разные остатки от деления на 4, поэтому хотя бы одно из них кратно 4. Значит, доску можно разбить на i прямоугольников $m\times 5$ и j прямоугольников $m\times 4$, каждый из которых затем разрезается на прямоугольники со сторонами 5 и 4. $\square$