9 класс. Первый вариант

1. Петя и Вася одновременно выехали на самокатах навстречу друг другу. Ровно посредине между ними расположен мост. Дорога от Пети до моста асфальтированная, а от Васи до моста — грунтовая. Известно, что по грунтовой дороге они едут с одинаковыми скоростями, а по асфальту Петя движется в 3 раза быстрее, чем по грунтовке. Петя за час добрался до моста и, не останавливаясь, продолжил движение. Через какое время после выезда он встретит Васю?

2. Дан квадратный трехчлен $2x^2 - x - 36$. Найдите все целые x, при которых значения этого трехчлена равны квадрату простого числа.

3. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a + b + c) = ab + bc + ca$. Докажите неравенство $5(a + b + c) \geqslant 7 + 8abc$.

4. У Маши есть 1000 бусинок 50 различных цветов, по 20 бусинок каждого цвета. При каком наименьшем n для любого способа собрать из всех бусинок ожерелье можно выбрать n последовательных бусинок, среди которых есть бусинки 25 разных цветов?

5. Точки A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC остроугольного треугольника ABC, точка M — середина отрезка A_1B_1. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины C на сторону AB. Через точку M проведены окружности, касающиеся сторон BC и AC соответственно в точках A_1 и B_1. Обозначим вторую точку пересечения окружностей через N. Докажите, что точки H, M и N лежат на одной прямой.

6. У натурального числа n нет ни одного делителя d, удовлетворяющего неравенству $n^2 \leqslant d^4 \leqslant n^3$. Докажите, что n имеет простой делитель, четвертая степень которого больше, чем n^3.

9 класс. Второй вариант

1. Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10 км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

2. Найдите все целые a, для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

3. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a + b + c) = 3$. Докажите неравенство $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8$.

4. Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы 99×99 так, чтобы в каждом квадрате 4×4 было не менее восьми фишек?

5. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Диагональ AC — биссектриса угла $\angle BAD$, точка M — середина стороны BC, а точка N — середина отрезка DO. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.

6. Докажите, что у каждого из чисел $n! + 1$, $n! + 2$, $\ldots$, $n! + n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.

9 класс. Третий вариант

1. Мальчик Толя любит плавать. Когда он приезжает на дачу к одной бабушке, он купается в Волхове и вниз по течению проплывает от одного пляжа до другого за 18 минут. Обратно он плывет ровно 1 час. Когда он приехал на дачу к другой бабушке, он проплыл по реке Луге ровно такое же расстояние по течению за 20 минут. Сколько ему потребуется времени, чтобы возвратиться назад?

2. Даны целые числа a и b. Докажите, что квадратный трехчлен $x^2 + 3ax + 3(2 - b^2)$ не имеет целых корней.

3. Сумма квадратов положительных чисел a, b и c равна трем. Докажите неравенство $a + b + c \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$.

4. Клетки таблицы 20×20 покрашены в n цветов, причем есть клетки каждого цвета. В каждой строке и в каждом столбце таблицы задействовано не более шести разных цветов. При каком наибольшем n такое возможно?

5. Вписанная в треугольник ABC окружность имеет центр I и касается сторон BC и AC в точках A_1 и B_1 соответственно. Серединный перпендикуляр к отрезку CI пересекает сторону BC в точке K. Через точку I проведена прямая, перпендикулярная KB_1, она пересекает сторону AC в точке L. Докажите, что прямые AC и A_1L перпендикулярны.

6. Даны два таких простых числа p и q, что $p < q < 2p$. Докажите, что существуют такие два последовательных натуральных числа, что наибольший простой делитель одного из них равен p, а наибольший простой делитель другого равен q.