6-7 классы. Первый вариант

1. Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

2. На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

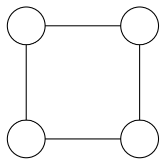

Рис. 2

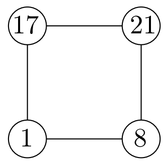

Рис. 3

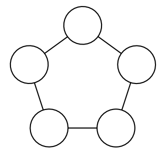

Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?
б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 25$?
в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 39$?
г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

3. На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

4. а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.

6-7 классы. Второй вариант

1. Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

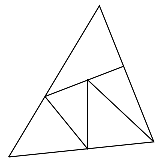

Рис. 1

2. На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 75$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

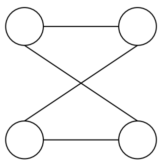

Рис. 2

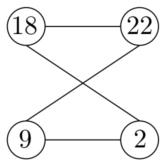

Рис. 3

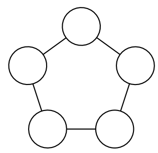

Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?

б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 49$?
в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 33$?
г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

3. На доске написано 865 плюсов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один плюс заменить на минус, либо стереть один плюс и два минуса, либо два плюса заменить на два минуса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

4. а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на три группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно $1/3$ от количества всех его друзей?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 11 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/11$ от общего числа его друзей.