# 9 класс. Первый вариант

**1.** Петя и Вася одновременно выехали на самокатах навстречу друг другу. Ровно посредине между ними расположен мост. Дорога от Пети до моста асфальтированная, а от Васи до моста — грунтовая. Известно, что по грунтовой дороге они едут с одинаковыми скоростями, а по асфальту Петя движется в 3 раза быстрее, чем по грунтовке. Петя за час добрался до моста и, не останавливаясь, продолжил движение. Через какое время после выезда он встретит Васю?

**Ответ:** через 2 часа.

**Решение.** Пусть расстояние до моста от стартовых позиций равно $x$. Петя добрался до моста за час. Вася ехал в три раза медленнее, поэтому за час он проехал путь $x/3$. В этот момент расстояние между Петей и Васей стало $2x/3$, а далее они движутся с одинаковыми скоростями. Поэтому до встречи каждый из них проедет расстояние $x/3$. Это столько же, сколько проехал Вася за первый час. Значит, им потребуется еще один час.

**2.** Дан квадратный трехчлен $2x^2 - x - 36$. Найдите все целые $x$, при которых значения этого трехчлена равны квадрату простого числа.

**Ответ:** $x = 5$ или $x = 13$.

**Решение.** Найдем все пары $(x, p)$, удовлетворяющие уравнению $2x^2 - x - 36 = p^2$, где $x$ — целое, а $p$ — простое. Разложим трехчлен на множители:

$$p^2 = 2x^2 - x - 36 = (2x - 9)(x + 4).$$

Если обе скобки в правой части кратны $p$, то на $p$ будет делиться и $2(x+4)-(2x-9) = 17$, то есть в этом случае $p = 17$. Тогда либо $2x - 9 = x + 4 = 17$, либо $2x - 9 = x + 4 = -17$. В первом случае получаем $x = 13$, а второй невозможен. Если же одна из скобок не кратна $p$, то либо $x + 4 = \pm 1$ и $2x - 9 = \pm p^2$, либо $2x - 9 = \pm 1$ и $x + 4 = \pm p^2$. Первый случай невозможен, а во втором подходит $x = 5$.

**3.** Положительные числа $a$, $b$ и $c$ удовлетворяют условию $abc(a + b + c) = ab + bc + ca$. Докажите неравенство $5(a + b + c) \geqslant 7 + 8abc$.

**Решение.** Поскольку

$$abc = \frac{ab + bc + ca}{a + b + c} \leqslant \frac{(a + b + c)^2}{3(a + b + c)} = \frac{a + b + c}{3},$$

нам достаточно доказать неравенство $5(a + b + c) \geqslant 7 + \frac{8}{3}(a + b + c)$, которое эквивалентно $a + b + c \geqslant 3$. Но это верно, поскольку $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$.

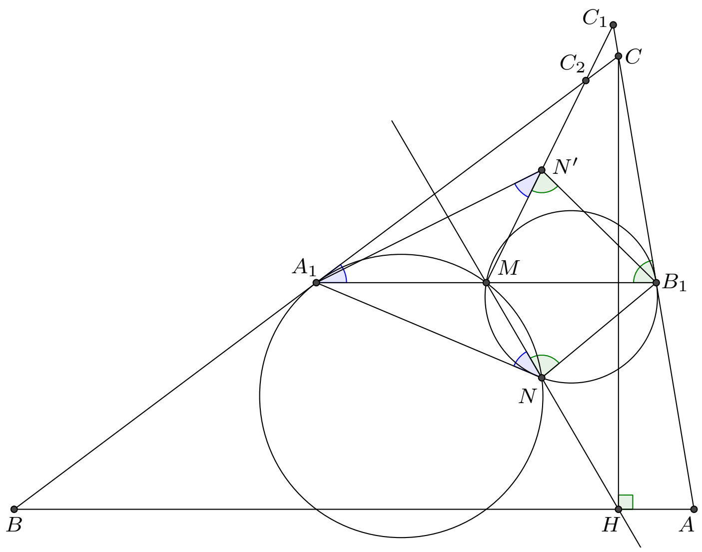
**4.** У Маши есть 1000 бусинок 50 различных цветов, по 20 бусинок каждого цвета. При каком наименьшем $n$ для любого способа собрать из всех бусинок ожерелье можно выбрать $n$ последовательных бусинок, среди которых есть бусинки 25 разных цветов?

**Ответ:** $n = 462$.

**Первое решение.** Назовем *куском ожерелья* длины $m$ набор из $m$ последовательных бусинок. Если в ожерелье расположить бусинки по 20 одноцветных подряд, то в куске длины 461 не может оказаться более 24 разных цветов. Поэтому $n \geqslant 462$. Рассмотрим кусок ожерелья длины 462. Предположим, что в нем не встретилось 25 бусинок разных цветов. Занумеруем бусинки ожерелья против часовой стрелки так, чтобы первыми были бусинки выбранного куска. Пусть $m$ — номер первой бусинки такого цвета, который не присутствует в куске (скажем, желтого). Покажем, что кусок ожерелья от $m - 461$ до $m$ содержит 25 цветов. Действительно, желтый цвет в нем есть. В оставшийся части куска желтый цвет не может встретиться по построению. Но там присутствуют бусинки не менее чем 24 цветов, поскольку $461 > 23 \cdot 20$.

**Второе решение.** Назовем *куском ожерелья* 462 последовательные бусинки. Покажем, что в каком-то куске будет 25 разных цветов. Предположим противное. Тогда в любом куске не более 24 разных цветов. Рассмотрим всевозможные пары, состоящие из куска ожерелья и некоторого встречающегося в нем цвета. В каждом куске не более 24 разных цветов, а общее число кусков ожерелья равно 1000. Поэтому число пар не превосходит $24 \cdot 1000 = 24\,000$. Рассмотрим теперь какой-то конкретный цвет (скажем, синий). Всего синих бусинок 20, между самыми дальними синими бусинками $A$ и $B$ всегда располагается не менее 18 бусинок (ровно 18 только когда все синие бусинки идут подряд). Значит, имеется не менее 19 кусков, содержащих $B$ и не содержащих $A$. Сама бусинка $A$ попадает в 462 куска. Таким образом, синие бусинки содержатся по крайней мере в 481 куске. Эти рассуждения справедливы для любого цвета. Поэтому общее число пар не меньше, чем $481 \cdot 50 = 24\,050 > 24\,000$, что невозможно.

**5.** Точки $A_1$ и $B_1$ — середины сторон $BC$ и $AC$ остроугольного треугольника $ABC$, точка $M$ — середина отрезка $A_1B_1$. Точка $H$ — основание высоты, опущенной из вершины $C$ на сторону $AB$. Через точку $M$ проведены окружности, касающиеся сторон $BC$ и $AC$ соответственно в точках $A_1$ и $B_1$. Обозначим вторую точку пересечения окружностей через $N$. Докажите, что точки $H$, $M$ и $N$ лежат на одной прямой.




**Решение.** Пусть $N'$ — точка, симметричная точке $N$ относительно прямой $A_1B_1$, прямая $MN'$ пересекает прямые $AC$ и $BC$ в точках $C_1$ и $C_2$ соответственно. Поскольку угол между касательной и секущей равен вписанному углу, опирающемуся на секущую,

$$\angle C_2A_1M = \angle A_1NM = \angle A_1N'M.$$

Следовательно, треугольники $MN'A_1$ и $MA_1C_2$ подобны. Значит, $\frac{MA_1}{MN'} = \frac{MC_2}{MA_1}$, откуда

$$MC_2 = \frac{MA_1^2}{MN'} = \frac{MB_1^2}{MN'}.$$

Аналогично

$$\angle C_1B_1M = \angle B_1NM = \angle B_1N'M.$$

Следовательно, треугольники $MN'B_1$ и $MB_1C_1$ подобны, откуда $MC_1 = \frac{MB_1^2}{MN'}$. Поэтому точки $C_1$ и $C_2$ совпадают, то есть прямая $MN'$ проходит через точку $C$. Относительно прямой $A_1B_1$ симметричны прямые $MN'$ и $MN$, а также точки $C$ и $H$. Поэтому $H$ лежит на прямой $MN$.

**6.** У натурального числа $n$ нет ни одного делителя $d$, удовлетворяющего неравенству $n^2 \leqslant d^4 \leqslant n^3$. Докажите, что $n$ имеет простой делитель, четвертая степень которого больше, чем $n^3$.

**Решение.** Если $k$ является делителем $n$, то $n/k$ также является делителем $n$. Тогда $n$ не имеет делителей $k$, для которых $n^2 \leqslant \left(\frac{n}{k}\right)^4 \leqslant n^3$, что эквивалентно $n \leqslant k^4 \leqslant n^2$. Следовательно, у числа $n$ нет делителей $k$, для которых $n \leqslant k^4 \leqslant n^3$. Пусть $d$ — наибольший делитель числа $n$, для которого $d^4 < n$, а $p$ — любой простой делитель числа $n/d$. Тогда $dp$ является делителем $n$. Из максимальности $d$ вытекает, что $d^4p^4 > n^3$. Следовательно, $p^4 = d^4p^4/d^4 > n^3/n = n^2$. Поскольку $p$ — делитель $n$, верно неравенство $p^4 > n^3$.

# 9 класс. Второй вариант

**1.** Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10 км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

**Ответ:** $6\frac{2}{3}$ км/ч.

**Решение.** Пусть расстояние до деревни равно $3x$ км. Если бы Коля все время ехал со скоростью 10 км/ч, то он потратил бы на дорогу $3x/10$ часов. Это и есть время от его выезда до закрытия магазина. Первую треть пути Коля проехал за $x/10$ часов. Увеличив скорость вдвое, Коля вторую треть пути проехал за $x/20$ часов. Таким образом, на две трети пути он потратил $x/10 + x/20 = 3x/20$ часов. Стало быть, до закрытия магазина осталось $3x/10 - 3x/20 = 3x/20$ часов, и за это время он сумел пройти $x$ км. Значит, он шел со скоростью $x : \frac{3x}{20} = \frac{20}{3}$ км/ч.

**2.** Найдите все целые $a$, для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

**Ответ:** $a = -1$ и $a = 9$.

**Первое решение.** Пусть $u$ и $v$ — корни трехчлена, причем $u < v$. Тогда по теореме Виета $uv = 2a$ и $u + v = -a$. Следовательно, $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = -\frac{1}{2}$. Если $v$ положительно, то $u$ отрицательно и $\frac{1}{u} < -\frac{1}{2}$. Отсюда $u = -1$, а значит, $v = 2$ и $a = -1$. Пусть оба корня отрицательны. Тогда $|u| > |v|$. Кроме того, $a > 0$ и

$$|u| \cdot |v| = 2a, \quad |u| + |v| = a \Rightarrow \frac{1}{|u|} + \frac{1}{|v|} = \frac{1}{2}.$$

Последнее равенство возможно только при $|v| \geqslant 3$. Но если $|v| \geqslant 4$, то $|u| > 4$ и $\frac{1}{|u|} + \frac{1}{|v|} < \frac{1}{2}$. Таким образом, $v = -3$, откуда $u = -6$ и $a = 9$.

**Второе решение.** Поскольку квадратный трехчлен имеет два целых корня, его дискриминант, равный $a(a-8)$, должен быть квадратом натурального числа. Если $a$ нечетно, то множители $a$ и $a - 8$ взаимно просты. Тогда $a = \pm b^2$ и $a - 8 = \pm c^2$ для некоторых натуральных $b$ и $c$, откуда $c^2 - b^2 = \pm 8$. Но на 8 могут различаться только квадраты чисел 1 и 3. Поэтому $a = 9$ или $a = -1$. Если $a$ четно, то $a = 2k$, и $k(k-4)$ — квадрат некоторого натурального числа $n$. Тогда

$$n^2 = k(k-4) = (k-2)^2 - 4 \Rightarrow (k-2)^2 - n^2 = 4.$$

Но квадраты двух натуральных чисел не могут различаются на 4.

**3.** Положительные числа $a$, $b$ и $c$ удовлетворяют условию $abc(a+b+c) = 3$. Докажите неравенство $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8$.

**Первое решение.** Заметим, что

$$(a+b)(b+c) = b(a+b+c) + ac = \frac{3}{ac} + ac \geqslant \frac{2}{ac} + 2,$$

поскольку $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ при $x > 0$. Следовательно,

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant \Big(\frac{2}{ac} + 2\Big)(c+a) \geqslant 2\sqrt{2 \cdot \frac{2}{ac}} \cdot 2\sqrt{ca} = 8.$$

**Второе решение.** Заметим, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 3\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big) - abc.$$

По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим

$$1 = \frac{1}{3}(a+b+c)\cdot abc \geqslant (abc)^{4/3} \Rightarrow abc \leqslant 1.$$

Таким образом, нам достаточно проверить, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 3$. Но это снова следует из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big) \geqslant \sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geqslant 1.$$

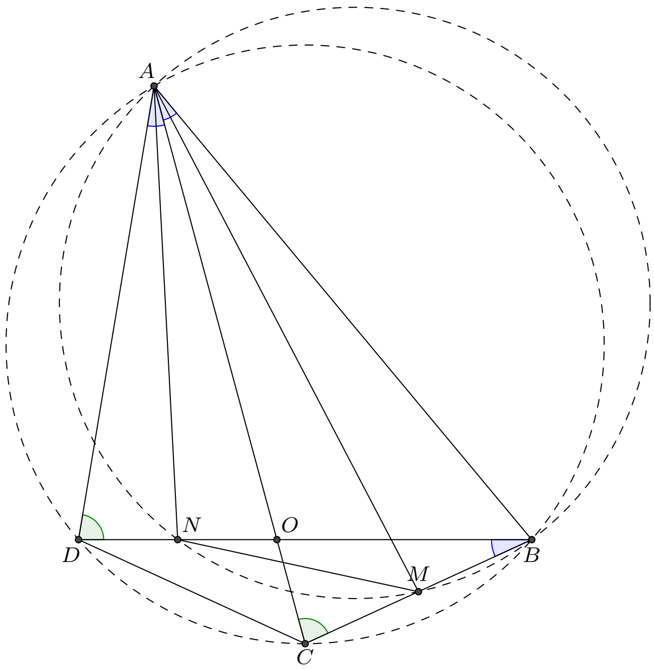
**4.** Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы $99\times 99$ так, чтобы в каждом квадрате $4\times 4$ было не менее восьми фишек?

**Ответ:** 4801.

**Решение.** Добавим к таблице строку и столбец с номером 100. Поставим во все их клетки по фишке. Расширенную таблицу разобьем на 625 квадратов $4\times 4$. В каждом квадрате может быть не более восьми пустых клеток, поэтому во всей таблице их не более 5000. Значит, общее количество фишек должно быть не меньше $99^2 - 5000 = 4801$.

Поставим теперь в расширенной таблице фишки в клетках, произведение координат которых делится на четыре. При этом в каждом из 625 квадратов $4\times 4$ окажется ровно по 8 фишек. Кроме того, добавленные строка и столбец будут целиком заполнены фишками. Поэтому в исходной таблице будет расставлено $625\cdot 8 - 199 = 4801$ фишек.

**5.** Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Диагональ $AC$ — биссектриса угла $\angle BAD$, точка $M$ — середина стороны $BC$, а точка $N$ — середина отрезка $DO$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.



**Первое решение.** Пусть четырехугольник $ABCD$ — вписанный. Тогда $\angle ADO = \angle ACB$. По условию $\angle OAD = \angle CAB$. Поэтому треугольники $AOD$ и $ABC$ подобны, откуда $\frac{AD}{DO} = \frac{AC}{CB}$. Тогда

$$\frac{AD}{DN} = \frac{2AD}{DO} = \frac{2AC}{CB} = \frac{AC}{CM},$$

и треугольники $ADN$ и $ACM$ подобны. Следовательно, $\angle DAN = \angle CAM$ и, значит,

$$\angle MAN = \angle CAD = \angle CBD = \angle MBN.$$

Таким образом, четырехугольник $ABMN$ — вписанный.

Пусть четырехугольник $ABMN$ — вписанный. Докажем, что четырехугольник $ABCD$ тоже вписанный. Предположим противное. Пусть $D'$ — точка пересечения луча $BD$ с описанной окружностью треугольника $ABC$, а $N'$ — середина отрезка $BD'$. Тогда четырехугольник $ABCD'$ — вписанный, и по доказанному ранее четырехугольник $ABMN'$ также вписанный. Заметим, что точки $N$ и $N'$ лежат и на описанной окружности треугольника $ABM$, и на прямой $BD$. Следовательно, они совпадают. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

**Второе решение.** Обоснуем другим способом, что из вписанности четырехугольника $ABMN$ следует вписанность четырехугольника $ABCD$.

Докажем вначале, что любой треугольник $RST$ однозначно определяется стороной $RS$, противолежащим ей углом $\tau$ и углом $\varphi$ между стороной $RS$ и проведенной к ней медианой. Действительно, $RS$ и $\tau$ однозначно определяют и радиус описанной окружности $\triangle RST$, и ее центр (точностью до симметрии относительно прямой $RS$). В зависимости от того, является угол $\tau$ тупым или острым, определяется, с какой стороны от прямой $RS$ лежит вершина $T$. С другой стороны, $T$ лежит на пересечении окружности с лучом, проведенным из середины отрезка $RS$ под углом $\varphi$ к $RS$. Таких лучей два, но они дают равные треугольники.

Из доказанного следует, что если в двух треугольниках равны углы при вершинах, а также углы между противолежащими им сторонами и опущенными к этим сторонам медианами, то такие треугольники подобны.

Применим это замечание к треугольникам $ADO$ и $ACB$. Углы $DAO$ и $CAB$ равны по условию, а углы $ANO$ и $AMB$ — в силу вписанности четырехугольника $ABMN$. Значит, треугольники $ADO$ и $ACB$ подобны, откуда $\angle ADO = \angle ACB$. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

**6.** Докажите, что у каждого из чисел $n! + 1$, $n! + 2$, $\ldots$, $n! + n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.

**Решение.** Если $1 \leqslant k \leqslant n$, то наибольший общий делитель чисел $n!$ и $n! + k$ равен $k$. Положим для краткости $m_k = (n! + k)/k = n!/k + 1$. Если числа $m_k$ и $n!$ взаимно просты, то возьмем любой простой делитель $p_k$ числа $m_k$. Тогда $p_k > n$ и на $p_k$ не делятся никакие числа от $n! + 1$ до $n! + n$, кроме $n! + k$. Поэтому выбранное $p_k$ подходит. Если же числа $m_k$ и $n!$ имеют общий делитель, то у $n!$ есть какой-то простой делитель $p$, являющийся и делителем числа $m_k = n!/k + 1$. Но $n!/k$ не кратно $p$, поэтому $p = k > n/2$. Тогда возьмем $p_k = k$. На него не делятся никакие числа от $n! + 1$ до $n! + n$, кроме $n! + k$, поэтому оно также подходит.

**1.** Мальчик Толя любит плавать. Когда он приезжает на дачу к одной бабушке, он купается в Волхове и вниз по течению проплывает от одного пляжа до другого за 18 минут. Обратно он плывет ровно 1 час. Когда он приехал на дачу к другой бабушке, он проплыл по реке Луге ровно такое же расстояние по течению за 20 минут. Сколько ему потребуется времени, чтобы возвратиться назад?

**Ответ:** 45 минут.

**Решение.** Пусть расстояние между пляжами равно $x$ км. Тогда в Волхове по течению Толя плывет со скоростью $x/18$ км/мин, а против течения — со скоростью $x/60$ км/мин. Поэтому собственная скорость Толи равна $\frac{1}{2}(x/60 + x/18) = 13x/360$ км/мин. В Луге по течению Толя плывет со скоростью $x/20$ км/мин. Значит, скорость течения в Луге равна $x/20 - 13x/360 = 5x/360$ км/мин. Следовательно, скорость Толи против течения в Луге равна $13x/360 - 5x/360 = x/45$ км/мин. Поэтому $x$ км против течения Луги Толя проплывет за 45 минут.

**2.** Даны целые числа $a$ и $b$. Докажите, что квадратный трехчлен $x^2 + 3ax + 3(2 - b^2)$ не имеет целых корней.

**Решение.** Если у трехчлена есть целый корень $u$, то по теореме Виета второй корень $v$ равен $-3a - u$ и, в частности, тоже является целым. Произведение $uv = 3(2 - b^2)$ кратно трем, поэтому один из корней трехчлена (скажем, $u$) делится на 3. Но тогда и $v = -3a - u$ делится на 3. Значит, $uv$ кратно 9, откуда $2 - b^2$ делится на 3. Но это невозможно, поскольку квадраты целых чисел дают при делении на 3 лишь остатки 0 и 1.

**3.** Сумма квадратов положительных чисел $a$, $b$ и $c$ равна трем. Докажите неравенство $a + b + c \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$.

**Решение.** Заметим, что

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - (a^4 + b^4 + c^4) = 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a^4 + b^4 + c^4).$$

Поэтому нам нужно доказать неравенство

$$a^4 - 3a^2 + 2a + b^4 - 3b^2 + 2b + c^4 - 3c^2 + 2c \geqslant 0.$$

Заметим, что при любом $x \geqslant 0$

$$x^4 - 3x^2 + 2x = x(x + 2)(x - 1)^2 \geqslant 0.$$

Суммируя эти неравенства для $x = a$, $x = b$ и $x = c$, мы получим требуемое.

**4.** Клетки таблицы $20 \times 20$ покрашены в $n$ цветов, причем есть клетки каждого цвета. В каждой строке и в каждом столбце таблицы задействовано не более шести разных цветов. При каком наибольшем $n$ такое возможно?

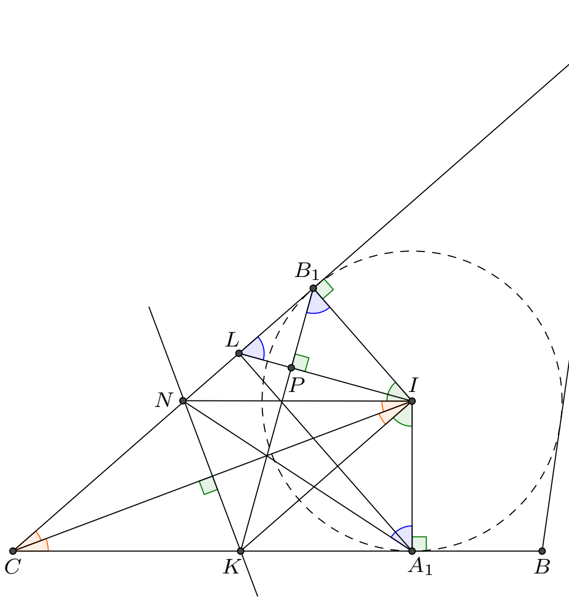
**Ответ:** 101.

**Решение.** Предположим, что есть раскраска в 102 цвета. Тогда найдутся две строки, в которых вместе задействовано не менее 12 цветов (в противном случае общее число цветов не превосходит $11 + 5 \cdot 18 = 101$). Пусть для определенности это первая и вторая строки. По условию в каждой строке присутствует не более шести разных цветов. Поэтому и в первой, и во второй строке задействовано ровно по шесть цветов, причем все эти цвета различны. Назовем используемые в первых двух строках цвета *темными*, а остальные — *светлыми*. Рассмотрим теперь столбцы таблицы. В каждом из них присутствует не более четырех светлых цветов, поскольку две верхние клетки окрашены в разные темные цвета. Тогда всего в таблице использовано не более $4 \cdot 20 = 80$ светлых цветов и 12 темных. Таким образом, общее количество цветов не превосходит $80 + 12 = 92 < 102$, что невозможно.

Раскраска в 101 цвет приведена ниже. Пустые клетки красим в 100-й цвет.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | | | | | | | | | | | | | |
| | | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | | | | | | | | | | | | | |
| | | | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | | | | | | | | | | | | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | | | | | | | | | | | | | | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 |
| 80 | | | | | | | | | | | | | | | | 81 | 82 | 83 | 84 |
| 85 | 86 | | | | | | | | | | | | | | | | 87 | 88 | 89 |
| 90 | 91 | 92 | | | | | | | | | | | | | | | | 93 | 94 |
| 95 | 96 | 97 | 98 | | | | | | | | | | | | | | | | 99 |

**5.** Вписанная в треугольник $ABC$ окружность имеет центр $I$ и касается сторон $BC$ и $AC$ в точках $A_1$ и $B_1$ соответственно. Серединный перпендикуляр к отрезку $CI$ пересекает сторону $BC$ в точке $K$. Через точку $I$ проведена прямая, перпендикулярная $KB_1$, она пересекает сторону $AC$ в точке $L$. Докажите, что прямые $AC$ и $A_1L$ перпендикулярны.




**Первое решение.** Обозначим через $N$ точку пересечения серединного перпендикуляра к отрезку $CI$ со стороной $AC$, а через $P$ — точку пересечения прямых $IL$ и $KB_1$. Поскольку $CI$ — биссектриса угла $\angle ACB$, по построению точки $K$ и $N$, а также точки $A_1$ и $B_1$ симметричны относительно прямой $CI$. Поэтому треугольники $KIB_1$ и $NIA_1$ симметричны относительно прямой $CI$ и, в частности, равны. Тогда

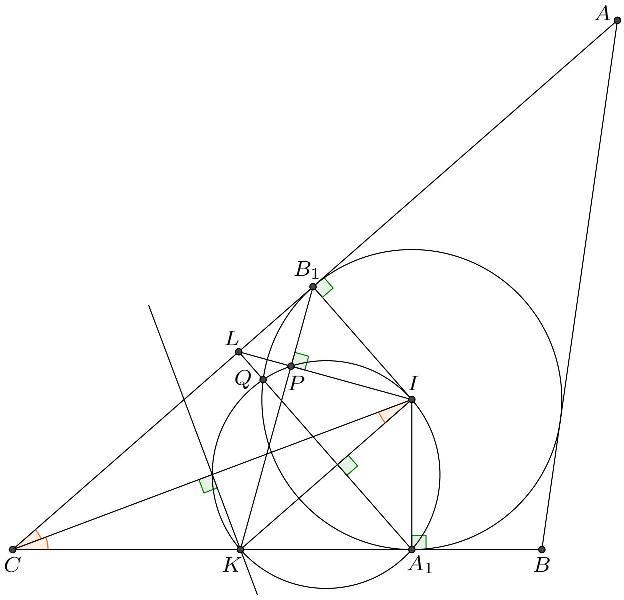
$$\angle B_1IK = \angle A_1IN \quad \text{и} \quad \angle IB_1K = \angle IA_1N.$$

Заметим, что

$$\angle B_1LI = 90^\circ - \angle LB_1P = \angle IB_1K = \angle IA_1N.$$

Значит, четырехугольник $A_1ILN$ — вписанный, откуда $\angle A_1LN = \angle A_1IN$. Поскольку $\angle ACI = \angle KCI = \angle KIC$, прямые $AC$ и $KI$ параллельны. Следовательно, $\angle B_1IK = \angle IB_1C = 90^\circ$. Таким образом,

$$\angle A_1LN = \angle A_1IN = \angle KIB_1 = 90^\circ.$$




**Второе решение.** Поскольку $\angle ACI = \angle KCI = \angle KIC$, прямые $AC$ и $KI$ параллельны. Поэтому достаточно доказать, что прямая $A_1L$ перпендикулярна $KI$.

Обозначим через $P$ точку пересечения прямых $IL$ и $KB_1$. Отметим, что прямоугольные треугольники $B_1PL$ и $IB_1L$ подобны и, значит, $\frac{LP}{LB_1} = \frac{LB_1}{LI}$. По построению $\angle KPI = \angle KA_1I = 90°$, поэтому точки $A_1$, $I$, $K$ и $P$ лежат на окружности $\omega$, построенной на отрезке $KI$ как на диаметре. Пусть эта окружность вторично пересекает вписанную окружность треугольника $ABC$ в точке $Q$. Тогда прямые $QA_1$ и $KI$ перпендикулярны, поскольку точки $Q$ и $A_1$ симметричны относительно диаметра $KI$. Таким образом, осталось проверить, что точка $A_1$ лежит на прямой $LQ$. Пусть прямая $LQ$ вторично пересекает окружность $\omega$ в некоторой точке $A_2$ и вторично пересекает вписанную окружность треугольника $ABC$ в некоторой точке $A_3$. Из свойства угла между касательной и секущей следует подобие треугольников $LB_1Q$ и $LA_3B_1$, откуда $\frac{LB_1}{LQ} = \frac{LA_3}{LB_1}$. Следовательно,

$$\frac{LP}{LQ} = \frac{LP}{LB_1} \cdot \frac{LB_1}{LQ} = \frac{LB_1}{LI} \cdot \frac{LA_3}{LB_1} = \frac{LA_3}{LI}.$$

С другой стороны, из вписанности четырехугольника $IPQA_2$ следует подобие треугольников $LPQ$ и $LA_2I$, откуда $\frac{LP}{LQ} = \frac{LA_2}{LI}$. Поэтому точки $A_2$ и $A_3$ совпадают между собой и с точкой $A_1$. Стало быть, точки $A_1$, $L$ и $Q$ лежат на одной прямой.

**6.** Даны два таких простых числа $p$ и $q$, что $p < q < 2p$. Докажите, что существуют такие два последовательных натуральных числа, что наибольший простой делитель одного из них равен $p$, а наибольший простой делитель другого равен $q$.

**Решение.** Рассмотрим числа $ap$ при всех целых $a$, удовлетворяющих неравенству $-\frac{1}{2}(q-1) \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}(q-1)$. Все они дают различные остатки от деления на $q$. Поскольку этих остатков ровно $q$, один из них равен 1. Следовательно, найдется такое $a$, что $ap = bq+1$ при некотором целом $b$. Значит, числа $|ap|$ и $|bq|$ различаются на 1. Кроме того,

$$|ap| \leqslant \tfrac{1}{2}(q-1)\cdot p < \tfrac{1}{2}pq < p^2, \quad |bq| \leqslant |ap|+1 \leqslant p^2 < q^2.$$

Тогда $p$ — наибольший делитель числа $|ap|$, а $q$ — наибольший делитель числа $|bq|$.