6-7 классы. Первый вариант

1. Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

Ответ: да, могли.

Решение. Предполагая, что все пять треугольников равны, попытаемся найти, какими свойствами должен обладать искомый треугольник. Сумма углов треугольника равна 180°, значит, сумма любых двух его углов меньше 180°. Заметим, что в вершине A сходятся *два* угла соседних треугольников, которые в сумме дают 180°. Значит, это два одинаковых угла, и потому оба они прямые. Тогда подходящую картинку легко нарисовать «по клеточкам».

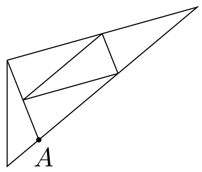
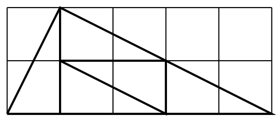


Рис. 1



2. На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

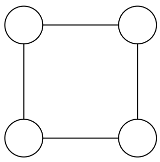


Рис. 2

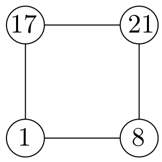


Рис. 3

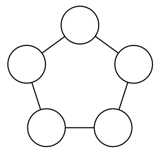


Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?

б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 25$?

в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 39$?

г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

Решение.

а) Ответ: при $n = 4$.

Поскольку требуется расставить четыре различных числа, n не может быть меньше 4. А при $n = 4$ расстановка существует — см. рис. 5.

б) Ответ: нет.

Так $25 = 5^2$, то для чисел a и b, не соединенных ребром, разность $a - b$ делится на 5. Но если разности $a - c$ и $c - b$ делятся на 5 (см. рис. 6), то и $a - b$ делится на 5, что недопустимо в требуемой расстановке.

в) Ответ: нет.

Так $39 = 3 \cdot 13$, то для чисел a и b, не соединенных ребром, разность $a - b$ делится на 3 или на 13. Пусть разность $a - d$ делится на 3 (см. рис. 7), тогда разность $b - d$ не может делиться на 3, значит, она должна делиться на 13. Тогда $b - e$ аналогично не делится на 13, но делится на 3; $e - c$ делится на 13, но не на 3; и наконец, $c - a$ делится на 3. Таким

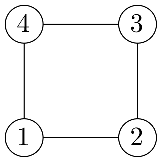


рис. 5

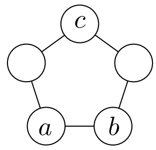


рис. 6

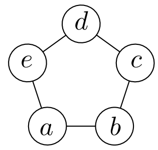


рис. 7

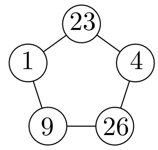


рис. 8

образом, $c - a$ и $a - d$ делятся на 3, значит, $c - d$ тоже делится на 3, что недопустимо в требуемой расстановке.

Случай, когда разность $a - d$ делится на 13, разбирается аналогично.

г) Ответ: при $n = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Из решений предыдущих пунктов следует, что число n должно иметь как минимум три различных простых делителя. Кроме того, нетрудно видеть, что число n не может быть четным (поскольку в цикле $abcde$ нечетное число ребер, в нём имеются два соседних числа одинаковой четности). Наименьшее число, удовлетворяющее этим ограничениям, — это число $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. для него нетрудно подобрать требуемую расстановку — см. рис. 8.

3. На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: выиграет Петя.

Решение. Первым ходом Петя должен заменить два минуса на три плюса. В результате этого количество минусов на доске станет делиться на 3. После любого Васиного хода число минусов изменится на 1 или 2, и Петя сможет походить таким образом, чтобы количество минусов опять стало делиться на 3 — для этого ему достаточно заменить 1 или 2 минуса на плюсы.

Действуя таким образом, Петя добьется того, что после некоторого его хода число минусов станет равно 0 и Вася не сможет сделать ход.

4. а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.

Ответ: нет.

Решение. Например, если в компании нечетное количество человек и все со всеми дружат, то в группе, которая содержит меньше народу, это условие выполнено не будет.

б) Нарисуем граф дружбы: люди — вершины, отношения дружбы — рёбра. Вершины из одной группы будем красить в одинаковый цвет. Возьмем разбиение на группы с максимальным количеством разноцветных ребер (т. е. ребер, концы которых разного цвета). Это разбиение подходит. Действительно, если у кого-то (скажем, из красной компании) в красной компании оказалось больше $1/15$ от общего числа своих друзей, то это значит, что в какой-то из остальных компаний (для определенности в синей) у этого человека окажется меньше $1/15$ от числа его друзей. Мы утверждаем, что при перемещении этого человека из красной компании в синюю количество разноцветных ребер увеличится. Действительно, пусть у «красного» человека A в красной группе m друзей, а в синей — n. При перемещении A в синюю группу m одноцветных ребер станут в «красно-синими», а n

«красно-синих» ребер — одноцветными. Так как $m > n$, число разноцветных ребер увеличится. Но это невозможно, поскольку мы выбрали разбиение на группы с максимальным количеством разноцветных ребер.

6-7 классы. Второй вариант

1. Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

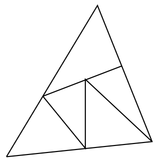
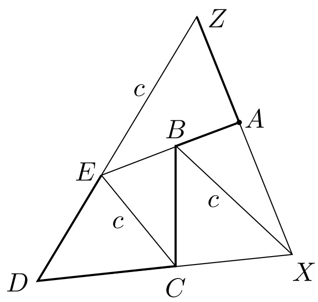


Рис. 1

Ответ: нет не могли.

Решение. Предположим, что все пять треугольников равны. Сумма углов треугольника равна $180°$, значит, сумма любых двух его углов меньше $180°$. Заметим, что в вершине A сходятся *два* угла соседних треугольников, которые в сумме дают $180°$. Значит, это два одинаковых угла, и потому оба они прямые.

Будем обозначать через c гипотенузы маленьких треугольников. Заметим, что $BX = EZ = c$, поскольку углы EAZ и BAX прямые. Кроме того, c — самая большая сторона любого из маленьких треугольников. Применяя этот факт к треугольникам BCX и EAZ, мы получим, что $BC < c$ и $BE < AE < c$. Значит, в треугольнике CBE стороны BC и BE являются катетами, откуда $CE = c$. Тогда все углы ломаной $EDCBAZ$ прямые, и значит, ее первое звено параллельно последнему, чего не может быть, так как эти звенья лежат на соседних сторонах большого треугольника.



2. На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a - b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a - b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 75$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

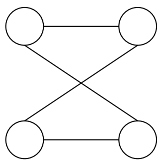


Рис. 2

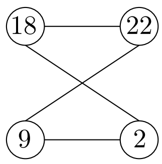


Рис. 3

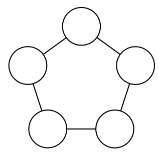


Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?

б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 49$?

в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 33$?

г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

Решение.

а) Ответ: при $n = 4$.

Поскольку требуется расставить четыре различных числа, n не может быть меньше 4. А при $n = 4$ расстановка существует — см. рис. 5.

б) Ответ: нет.

Так $49 = 7^2$, то для чисел a и b, не соединенных ребром, разность $a - b$ делится на 7. Но если разности $a - c$ и $c - b$ делятся на 7 (см. рис. 6), то и $a - b$ делится на 7, что недопустимо в требуемой расстановке.

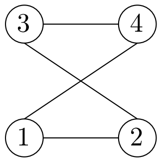


рис. 5

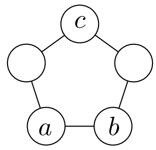


рис. 6

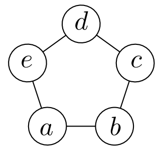


рис. 7

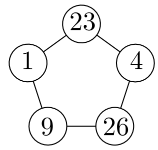


рис. 8

в) Ответ: нет.

Так $33 = 3 \cdot 11$, то для чисел a и b, не соединенных ребром, разность $a - b$ делится на 3 или на 11. Пусть разность $a - d$ делится на 3 (см. рис. 7), тогда разность $b - d$ не может делиться на 3, значит, она должна делиться на 11. Тогда $b - e$ аналогично не делится на 11, но делится на 3; $e - c$ делится на 11, но не на 3; и наконец, $c - a$ делится на 3. Таким образом, $c - a$ и $a - d$ делятся на 3, значит, $c - d$ тоже делится на 3, что недопустимо в требуемой расстановке.

Случай, когда разность $a - d$ делится на 11, разбирается аналогично.

г) Ответ: при $n = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Из решений предыдущих пунктов следует, что число n должно иметь как минимум три различных простых делителя. Кроме того, нетрудно видеть, что число n не может быть четным (поскольку в цикле $abcde$ нечетное число ребер, в нём имеются два соседних числа одинаковой четности). Наименьшее число, удовлетворяющее этим ограничениям, — это число $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Для него нетрудно подобрать требуемую расстановку — см. рис. 8.

3. На доске написано 865 плюсов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один плюс заменить на минус, либо стереть один плюс и два минуса, либо два плюса заменить на два минуса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: выиграет Петя.

Решение. Первым ходом Петя должен заменить один плюс на минус. В результате этого количество плюсов на доске станет делиться на 3. После любого Васиного хода число плюсов изменится на 1 или 2, и Петя сможет походить таким образом, чтобы количество плюсов опять стало делиться на 3 — для этого ему достаточно заменить один или два плюса на минусы.

Действуя таким образом, Петя добьется того, что после некоторого его хода число плюсов станет равно 0 и Вася не сможет сделать ход.

4. а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на три группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно $1/3$ от количества всех его друзей?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 11 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/11$ от общего числа его друзей.

Ответ: нет.

Решение. Например, если в компании количество человек не делится на 3 и все со всеми дружат, то в одной из групп окажется меньше $1/3$ от общего числа людей и в этой группе условие выполнено не будет.

б) Нарисуем граф дружбы: люди — вершины, отношения дружбы — рёбра. Вершины из одной группы будем красить в одинаковый цвет. Возьмем разбиение на группы с максимальным количеством разноцветных ребер (т. е. ребер, концы которых разного цвета). Это разбиение подходит. Действительно, если у кого-то (скажем, из красной компании) в красной компании оказалось больше $1/11$ от общего числа своих друзей, то это значит, что в какой-то из остальных компаний (для определенности в синей) у этого человека окажется меньше $1/11$ от числа его друзей. Мы утверждаем, что при перемещении этого человека из красной компании в синюю количество разноцветных ребер увеличится. Действительно, пусть у «красного» человека A в красной группе m друзей, а в синей — n. При перемещении A в синюю группу m одноцветных ребер станут в «красно-синими», а n «красно-синих» ребер — одноцветными. Так как $m > n$, число разноцветных ребер увеличится. Но это невозможно, поскольку мы выбрали разбиение на группы с максимальным количеством разноцветных ребер.