

**Олимпиада школьников СПбГУ по математике**  
**Примеры заданий отборочного этапа**  
**2020/2021 учебный год**

**Задания для 8–9 классов**

1. (10 баллов) *На доске выписали все трехзначные числа, делящиеся на 5, у которых число сотен больше числа десятков, а число десятков больше числа единиц. Таких чисел оказалось  $A$  штук. Затем выписали все трехзначные числа, делящиеся на 5, у которых число сотен меньше числа десятков, а число десятков меньше числа единиц. Таких чисел оказалось  $B$  штук. Выберите верные утверждения.*  
*а)  $A > B$ ; б)  $B > 10$ ; в)  $A + B > 100$ ; г)  $A < 10$ ; д) среди перечисленных ответов нет верного.*
2. (10 баллов) *У Васи имеются 9 разных книг Аркадия и Бориса Стругацких, содержащих по одному произведению писателей каждая. Вася хочет расставить эти книги на полке так, чтобы рядом стояли: а) романы «Жук в муравейнике» и «Волны гасят ветер» (неважно, в каком порядке); б) повести «Беспокойство» и «Повесть о дружбе и недружбе» (неважно, в каком порядке). Сколькими способами Вася может это сделать?*  
*а)  $4 \cdot 7!$ ; б)  $9!$ ; в)  $9!/4!$ ; г)  $4! \cdot 7!$ ; д) другой ответ.*
3. (10 баллов) *Пусть в треугольнике  $ABC$  сторона  $AB = 5$ , а сторона  $BC = 4$ . Выберите неверные утверждения:*  
*а) если  $AC = 4$ , то  $\angle ABC > \angle BAC$ ;*  
*б) если  $AC = 3$ , то  $\angle ABC < \angle BAC$ ;*  
*в) если  $AC = 2$ , то  $\angle ACB > \angle ABC$ ;*  
*г) если  $AC = 1$ , то  $\angle ABC < \angle BAC$ .*  
*д) неверных утверждений нет.*
4. (20 баллов) *На уроке математики каждому из гномов нужно найти трехзначное число, при прибавлении к которому числа 198, получалось бы число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. При каком максимальном числе гномов все найденные ими числа могли оказаться различными?*
5. (20 баллов) *Найдите кратное трём восьмизначное число-палиндром, записанное цифрами 0 и 1, если известно, что в записи всех его простых делителей используются только цифры 1, 3 и 7. (Числа-палиндромы читаются одинаково как слева направо, так и справа налево, например, 11011).*

6. (30 баллов) На стороне  $NA$  треугольника  $NBA$  отмечены точки  $Q$  и  $F$  такие, что  $NQ = FA = NA/4$ . На отрезке  $QF$  выбрана точка  $L$ . Через точки  $Q$  и  $F$  проведены прямые, параллельные  $BL$ , до пересечения со сторонами  $NB$  и  $AB$  в точках  $D$  и  $K$  соответственно. Верно ли, что сумма площадей треугольников  $NDL$  и  $AKL$  в 2 раза меньше площади треугольника  $NBA$ ?
7. (30 баллов) Перед началом урока учительница записала на доске следующую задачу: «В окружность радиуса  $r$  вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма длин основания и высоты равна диаметру окружности. Найдите высоту треугольника». Однако двоечник Вася незаметно стер слово «диаметру» и вписал вместо него «длине». Сможет ли отличник Петя решить задачу с исправленным Васей условием?
8. (30 баллов) Двоечнику Васе приснилось, что верно следующее утверждение: если в треугольнике  $ABC$  медиана  $CC_1$ , проведенная к стороне  $AB$ , больше медианы  $AA_1$ , проведенной к стороне  $BC$ , то  $\angle CAB$  меньше  $\angle BCA$ . Отличник Петя считает, что это утверждение ошибочно. Выясните, кто из них прав.
9. (40 баллов) На острове живут только 50 рыцарей, которые всегда говорят правду, и 15 обывателей, которые могут говорить правду, но могут и лгать. Рассеянный профессор, приехавший на остров прочесть лекцию, забыл, какого цвета шляпа на нем надета. Какое минимальное число встречных местных жителей профессор должен спросить о цвете своей шляпы, чтобы точно знать, какой он?