

9 КЛАСС. ПЕРВЫЙ ВАРИАНТ

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 19 островитян. Трое из них сказали: «Ровно трое из нас лжецы», затем шестеро из остальных сказали: «Ровно шестеро из нас лжецы», наконец, девять из оставшихся сказали: «Ровно девять из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 = 64$. Найдите наибольшее значение выражения $a^7 + b^7 + c^7 + d^7$.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K . К описанной окружности треугольника AKC проведена касательная ℓ_1 , параллельная прямой AB и ближайшая к ней. Она коснулась окружности в точке L . Прямая AL пересекла описанную окружность треугольника ABK в точке M ($M \neq A$). К этой окружности в точке M проведена касательная ℓ_2 . Докажите, что прямые BK, ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в одной точке.

5. Дана клетчатая доска 2020×2021 . Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом квадрате 4×4 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все пары таких простых чисел p и q , что $p^2 + 5pq + 4q^2$ является квадратом натурального числа.

9 КЛАСС. ВТОРОЙ ВАРИАНТ

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 28 островитян. Двое из них сказали: «Ровно двое из нас лжецы», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из нас лжецы», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из нас лжецы», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Сумма неотрицательных чисел a , b и c равна 3. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + 2ca$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках K и L . Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точках A и C , а окружность ω_2 — в точках B и D , причем точки идут на прямой ℓ в алфавитном порядке. Обозначим через P и Q соответственно проекции точек B и C на прямую KL . Докажите, что прямые AP и DQ параллельны.

5. Дана клетчатая доска 2021×2021 . Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом прямоугольнике 3×5 и 5×3 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все такие натуральные числа n , что число $2^n + n^2 + 25$ является кубом простого числа.

9 КЛАСС. ТРЕТИЙ ВАРИАНТ

1. Найдите все такие значения a , для которых квадратные трехчлены $x^2 + 2x + a$ и $x^2 + ax + 2 = 0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

3. Для произвольных вещественных чисел a и b ($b \neq 0$) найдите наименьшее значение выражения $a^2 + b^2 + \frac{a}{b} + \frac{1}{b^2}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC . На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 . Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1 , лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB . Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2 , лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC . Прямые BD и CE пересекаются в точке K . Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE .

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n , что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n + 3)$ кратно трем.

9 КЛАСС. ЧЕТВЕРТЫЙ ВАРИАНТ

1. Найдите все такие значения a , для которых квадратные трехчлены $x^2 - 6x + 4a$ и $x^2 + ax + 6 = 0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

2. На острове живут лжецы и рыцари, всего 2021 человек. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. В один прекрасный день все жители острова построились в шеренгу. После этого каждый житель острова заявил: «Количество стоящих справа от меня лжецов больше количества стоящих слева от меня рыцарей». Сколько на острове рыцарей? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Для произвольных вещественных чисел a и b ($a \neq 0$) найдите наименьшее значение выражения $\frac{1}{a^2} + 2a^2 + 3b^2 + 4ab$.

4. Проходящая через точки B и C окружность ω пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно ($K \neq B$ и $L \neq C$). На луче BL отмечена такая точка P , что $BP = AC$, а на луче CK отмечена такая точка Q , что $CQ = AB$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника APQ лежит на ω .

5. Дана клетчатая доска 3×2021 (3 клетки по вертикали и 2021 клетка по горизонтали) и неограниченный запас картонных полосок 1×3 . Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди без наложений размещают на доске полоски (по клеточкам), по одной полоске за ход. Петя кладет свои полоски горизонтально, а Вася — вертикально. Проигрывает игрок, не имеющий хода, начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все такие простые числа p и q , что $p^{q+1} + q^{p+1}$ является квадратом натурального числа.