

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2020/2021 учебный год

Задания для 6–7 классов

1. (20 баллов) *На доске выписали все двузначные числа, делящиеся на 5, у которых число десятков больше числа единиц. Таких чисел оказалось A штук. Затем выписали все двузначные числа, делящиеся на 5, у которых число десятков меньше числа единиц. Таких чисел оказалось B штук. Чему равно $100B + A$?*
2. (20 баллов) *Найдите количество различных четырехзначных чисел, которые можно получить, переставляя цифры числа 2021 (включая и это число).*
3. (30 баллов) *На уроке математики каждому из семи гномов нужно найти одно двузначное число, при прибавлении к которому числа 18 получалось бы число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Могут ли все числа, найденные гномами, оказаться различными?*
4. (30 баллов) *Пусть натуральные числа m и n удовлетворяют равенству $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2020}$. Докажите, что m и n не могут одновременно быть нечетными.*
5. (50 баллов) *При распределении земельных участков фермеру Новоселову выделили 2 квадратных участка разной площади, имеющих целочисленные стороны. Возможно ли выделить фермеру Малинникову также 2 квадратных участка с целочисленными сторонами, чтобы суммарная площадь участков Малинникова была в 2 раза больше суммарной площади участков Новоселова?*
6. (50 баллов) *Пусть последовательность чисел A такова, что $A_1 = 3$, $A_2 = 8$, $A_3 = 13$, \dots . Докажите, что существует бесконечное количество числовых последовательностей B со следующими свойствами:*
 - 1) $B_1 = 7$;
 - 2) $B_k = B_{k-1} + d$, где d — некоторое число ($k = 2, 3, 4, \dots$);
 - 3) имеют с последовательностью A бесконечно много совпадающих членов.