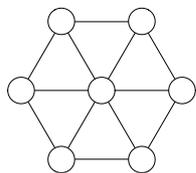
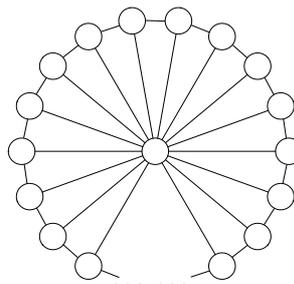


## 6–7 класс

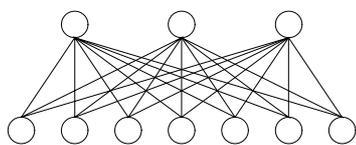
1. На картинке нарисовано  $n$  кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до  $n$  (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а)  $n = 7$



в)  $n = 2022$ : по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре



б)  $n = 10$

2. Назовем *каскадом*, порожденным числом  $r$ , набор из 12 натуральных чисел:  $r, 2r, \dots, 12r$ .

а) Может ли какая-то пара чисел  $(a, b)$  содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

3. В треугольнике  $ABC$  точка  $D$  — середина стороны  $AB$ ,  $E$  — середина стороны  $AC$ ,  $F$  — середина биссектрисы  $AL$ , причем  $DF = 1$ ,  $EF = 2$ . На плоскости изображены точки  $D, E, F$  так, что прямая  $DF$  горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина  $A$  находилась сверху от прямой  $DF$ ?

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника  $5 \times 10$  клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков  $A, B$  и  $C$  на картинке  $AB = 5$ ,  $AC = 10$ ,  $BC = 9$ . Можно ли отметить в этом городе  $k$  перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток  $C$  находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а)  $k = 5$ ;      б)  $k = 6$ ;      в)  $k = 7$ .

