Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2020/2021 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) *Правила игры следующие: из 64 различных предметов на каждом шаге игроку нужно сформировать множество предметов, ранее не упоминавшееся в игре, в котором количество предметов равно возрасту игрока в годах. Игроки делают ходы по очереди; начинать игру может любой из игроков; проигрывает тот, кто не может сделать ход. Множества предметов считаются различными, если они различаются хотя бы одним предметом или если они содержат разное количество предметов. В игре участвуют Василий и Федор; каждый из игроков имеет возможность сделать хотя бы один ход. Известно, что: а) Василий на 2 года старше Федора; б) Федору не менее 5 лет; в) Федор всегда выигрывает. Какое наименьшее количество лет может быть Василию?*

2. (10 баллов) *Министр К. издал распоряжение, что прием граждан будет осуществляться только в том случае, если количество способов выбрать из пришедших группу из четырех человек меньше количества способов выбрать из них группу из двух человек. Определите, каким может быть максимальное число граждан, чтобы министр их принял?*

3. (20 баллов) *На уроке математики каждому из гномов нужно найти трехзначное число без нулевых цифр, кратное 3, при прибавлении к которому числа 297 получалось бы число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое минимальное число гномов должно быть на уроке, чтобы среди найденных ими чисел всегда нашлось хотя бы два одинаковых?*

4. (20 баллов) *Пусть множество* $\boldsymbol{A}$ *состоит из всех трёх-, пяти-, семи- и девятизначных чисел, в записи которых используются десятичные цифры* $1, 2, \ldots, n$ *(не обязательно различные), а множество* $\boldsymbol{B}$ *— из всех двузначных, четырёх-, шести- и восьмизначных чисел, в записи которых используются десятичные цифры* $1, 2, \ldots, m$ *(не обязательно различные). При каких* m *чисел в* $\boldsymbol{B}$ *будет не меньше, чем в* $\boldsymbol{A}$*, если* $n = 6$*?*

5. (30 баллов) *В треугольнике* KIA *на стороне* KI *отметили точку* V *такую, что* $KI = VA$*. Затем внутри треугольника отметили точку* X *такую, что угол* XKI *равен половине угла* AVI*, а угол* XIK *равен половине угла* KVA*. Пусть* O *— точка пересечения прямой* AX *и стороны* KI*. Верно ли, что* $KO = VI$*?*

6. (30 баллов) *В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 6$ и $AC = 4$ проведена биссектриса AA_1 угла BAC. Далее, в треугольнике AA_1C проведена биссектриса A_1C_1 угла AA_1C; в треугольнике C_1A_1C проведена биссектриса C_1A_2 угла A_1C_1C; в треугольнике C_1A_2C проведена биссектриса A_2C_2 угла C_1A_2C; $\ldots$; в треугольнике $C_{2020}A_{2020}C$ проведена биссектриса $C_{2020}A_{2021}$ угла $A_{2020}C_{2020}C$; в треугольнике $C_{2020}A_{2021}C$ проведена биссектриса $A_{2021}C_{2021}$ угла $C_{2020}A_{2021}C$. Докажите, что треугольники ABC и $A_{2021}C_{2021}C$ подобны и найдите коэффициент подобия этих треугольников.*

7. (40 баллов) *Положительные числа x, y, z таковы, что $xy + yz + zx = 6$. Верно ли, что*

$$\frac{1}{2\sqrt{2} + x^2(y+z)} + \frac{1}{2\sqrt{2} + y^2(x+z)} + \frac{1}{2\sqrt{2} + z^2(x+y)} \leq \frac{1}{xyz}?$$

8. (40 баллов) *В 8-А классе n учеников ($n \geq 2$). Для них организованы кружки, каждый из которых посещают хотя бы двое. Каждые два кружка, у которых есть хотя бы два общих ученика, отличаются по количеству участников. Докажите, что кружков не более $(n-1)^2$.*

9. (40 баллов) *Найдите количество пар натуральных чисел m и n, удовлетворяющих равенству $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2020}$.*