Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2020/2021 учебный год

Задания для 8–9 классов

1. (10 баллов) *На доске выписали все трехзначные числа, делящиеся на 5, у которых число сотен больше числа десятков, а число десятков больше числа единиц. Таких чисел оказалось A штук. Затем выписали все трехзначные числа, делящиеся на 5, у которых число сотен меньше числа десятков, а число десятков меньше числа единиц. Таких чисел оказалось B штук. Выберите верные утверждения.*

а) $A > B$; *б)* $B > 10$; *в)* $A + B > 100$; *г)* $A < 10$; *д) среди перечисленных ответов нет верного.*

Ответ: а).

Решение: Обозначим трехзначное число как $\overline{xyz}$, где x — число сотен, y — число десятков, z — число единиц. По условию, искомые числа делятся на 5, значит, z равно либо 0, либо 5.

Определим, чему равно A. Если $z = 0$, то нас интересует количество пар (x, y): $9 \geq x > y > 0$. Их $8+7+\ldots+1 = 36$ (8 — количество чисел, начинающихся с 9; 7 — количество чисел, начинающихся с 8; ...; 1 — количество чисел, начинающихся с 2, т. е. число 21). Если $z = 5$, то количество пар (x, y), в которых $9 \geq x > y > 5$, будет равно $3 + 2 + 1 = 6$. Отсюда $A = 36 + 6 = 42$.

Вычислим B. Здесь может быть только случай $z = 5$, потому что меньше нуля число десятков быть не может. Значит, необходимо найти количество таких пар (x, y), что $0 < x < y < 5$. Их $3 + 2 + 1 = 6$ (3 — количество чисел, начинающихся с 1; 2 — количество чисел, начинающихся с 2; и число 34). Поэтому $B = 6$.

Получаем, что верен пункт а).

2. (10 баллов) *У Васи имеются 9 разных книг Аркадия и Бориса Стругацких, содержащих по одному произведению писателей каждая. Вася хочет расставить эти книги на полке так, чтобы рядом стояли: а) романы «Жук в муравейнике» и «Волны гасят ветер» (неважно, в каком порядке); б) повести «Беспокойство» и «Повесть о дружбе и недружбе» (неважно, в каком порядке). Сколькими способами Вася может это сделать?*

а) $4 \cdot 7!$; *б)* $9!$; *в)* $9!/4!$; *г)* $4! \cdot 7!$; *д) другой ответ.*

Ответ: а).

Решение: Запишем решение для общего случая, когда имеется N различных книг. Васе нужно расположить в ряд $N-2$ объектов: $N-4$ книги, не указанные в пунктах а) и б), и двух пар из а) и б). Это можно сделать $(N-2)!$ способами. Кроме того, внутри каждой пары можно менять книги местами, что увеличивает общее число вариантов в 4 раза. В итоге получаем $4 \cdot (N-2)!$ способов.

Для случая, когда изначально имеется 9 разных книг, получаем $4 \cdot (9-2)! = 4 \cdot 7!$.

3. (10 баллов) *Пусть в треугольнике ABC сторона $AB = 5$, а сторона $BC = 4$. Выберите неверные утверждения:*

а) если $AC = 4$, то $\angle ABC > \angle BAC$;
б) если $AC = 3$, то $\angle ABC < \angle BAC$;
в) если $AC = 2$, то $\angle ACB > \angle ABC$;
г) если $AC = 1$, то $\angle ABC < \angle BAC$.
д) неверных утверждений нет.

Ответ: а) и г).

Решение: Заметим, что вариант а) не может быть верным, так как в таком случае треугольник будет равнобедренным с основанием AB и указанные углы будут равны.

Также не может быть верен вариант г), поскольку в этом случае $AB = BC + AC$ и треугольник будет вырожденным.

В случае б) угол BAC прямой и потому больше ABC; а в случае в) угол ACB тупой.

4. (20 баллов) *На уроке математики каждому из гномов нужно найти трехзначное число, при прибавлении к которому числа 198, получалось бы число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. При каком максимальном числе гномов все найденные ими числа могли оказаться различными?*

Ответ: 70.

Решение: В силу принципа Дирихле максимальное число гномов равно количеству чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Обозначим трехначное число как $\overline{xyz}$, где x — число сотен, y — число десятков, z — число единиц. Поскольку наряду с числом $\overline{xyz}$ рассматривается и число $\overline{zyx}$, то $x > 0$ и $z > 0$. По условию $100x + 10y + z + 198 = 100z + 10y + x$. Преобразуем:

$$99z - 99x = 198 \Leftrightarrow x = z - 2.$$

Так как $0 < x = z - 2 \leq 9$ и $z \leq 9$, то $0 < x \leq 7$. Таким образом, нам подходят 7 значений x. Каждому x соответствует одно значение z, а вот y может быть любым. Следовательно, количество чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно $7 \cdot 10 = 70$.

5. (20 баллов) *Найдите кратное трём восьмизначное число-палиндром, записанное цифрами 0 и 1, если известно, что в записи всех его простых делителей используются только цифры 1, 3 и 7. (Числа-палиндромы читаются одинаково как слева направо, так и справа налево, например, 11011).*

Ответ: $10111101 = 3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 37$.

Решение: Отметим следующее: поскольку в задаче требуется найти число-палиндром, то последняя цифра искомого числа, равно как и первая, должны быть равны 1; число делится на 3 тогда и только тогда, когда на 3 делится сумма его цифр.

Таким образом, нас интересует число вида $\overline{1abccba1}$, где a, b, c равны 0 или 1, а $2(a+b+c)$ имеет остаток 1 при делении на 3; т.е. $a+b+c$ должно иметь остаток 2 при делении на 3. Следовательно, только одна из цифр a, b, c может быть равна нулю. Получаем, что надо проверить три числа: 10111101, 11011011 и 11100111. Отметим, что каждое из этих чисел кратно 11.

$$10111101 = 3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 37,$$

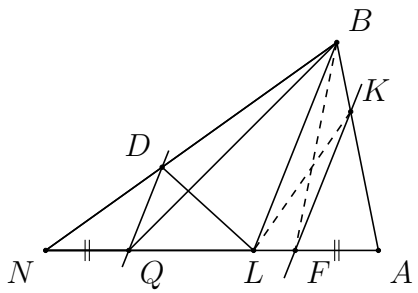
$$11011011 = 3 \cdot 11 \cdot 333667, \quad 11100111 = 3 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 9091.$$

Два последних числа не удовлетворяют условиям задачи.

6. (30 баллов) *На стороне NA треугольника NBA отмечены точки Q и F такие, что $NQ = FA = NA/4$. На отрезке QF выбрана точка L. Через точки Q и F проведены прямые, параллельные BL, до пересечения со сторонами NB и AB в точках D и K соответственно. Верно ли, что сумма площадей треугольников NDL и AKL в 2 раза меньше площади треугольника NBA?*

Ответ: Да, верно.

Решение:



Поскольку $LB \| QD$, то равны площади треугольников LQD и BQD — эти треугольники имеют основание DQ, а их высоты равны расстоянию между параллельными прямыми LB и QD. Аналогично, поскольку $LB \| FK$, то равны площади треугольников LFK и BFK,

имеющих основание FK. Таким образом, $S_{LDN} = S_{NDQ} + S_{QDL} = S_{NDQ} + S_{QDB} = S_{BQN}$ и, аналогично, $S_{LKA} = S_{BFA}$.

Заметим, что у треугольников NQB, AFB и BNA одинаковая высота (расстояние от точки B до прямой NA). Значит, отношение площадей этих треугольников равно отношению длин оснований:

$$NQ + FA = (1/4 + 1/4)NA = NA/2 \Leftrightarrow S_{NQB} + S_{AFB} = S_{NBA}/2$$

$$\Leftrightarrow S_{LDN} + S_{LKA} = S_{NBA}/2.$$

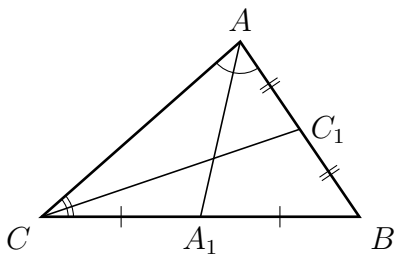
7. (30 баллов) *Перед началом урока учительница записала на доске следующую задачу: «В окружность радиуса r вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма длин основания и высоты равна диаметру окружности. Найдите высоту треугольника». Однако двоечник Вася незаметно стер слово «диаметру» и вписал вместо него «длине». Сможет ли отличник Петя решить задачу с исправленным Васей условием?*

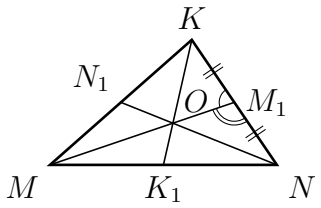
Ответ: Нет, не сможет.

Решение: Длина стороны a треугольника не может превышать диаметр окружности, а высота h вписанного треугольника меньше диаметра описанной окружности. Значит, сумма длин основания и высоты меньше $4r$. Поскольку $\pi > 3$, справедливо неравенство $a + h < 4r < 2\pi r$, что противоречит Васиному исправлению. Значит, Петя не сможет решить задачу с исправленным условием.

8. (30 баллов) *Двоечнику Васе приснилось, что верно следующее утверждение: если в треугольнике ABC медиана CC_1, проведенная к стороне AB, больше медианы AA_1, проведенной к стороне BC, то $\angle CAB$ меньше $\angle BCA$. Отличник Петя считает, что это утверждение ошибочно. Выясните, кто из них прав.*

Ответ: Прав Петя.





Решение: Сначала приведем доказательство вспомогательного утверждения: большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана. Рассмотрим треугольник KMN, где $MN > MK$. Пусть медианы MM_1, KK_1 и NN_1 пересекаются в точке O. Сравним элементы треугольников KMM_1 и NMM_1: $KM_1 = M_1N$, MM_1 — общая сторона, а $KM < MN$, следовательно, $\angle MM_1K < \angle MM_1N$. Теперь рассмотрим треугольники OM_1K и

OM_1N: $KM_1 = M_1N$, OM_1 — общая сторона и $\angle OM_1K < \angle OM_1N$, следовательно, $KK_1 = \frac{3}{2}OK < \frac{3}{2}ON = NN_1$.

Вернемся к сну Васи: если $CC_1 > AA_1$, то согласно вспомогательному утверждению, для треугольника ABC справедливо неравенство $AB < BC$. Поскольку против большей стороны лежит больший угол, то $\angle ACB < \angle BAC$. Значит, Вася ошибся.

9. (40 баллов) *На острове живут только 50 рыцарей, которые всегда говорят правду, и 15 обывателей, которые могут говорить правду, но могут и лгать. Рассеяный профессор, приехавший на остров прочесть лекцию, забыл, какого цвета шляпа на нем надета. Какое минимальное число встречных местных жителей профессор должен спросить о цвете свой шляпы, чтобы точно знать, какой он?*

Ответ: 31.

Решение: Поскольку профессор будет спрашивать только про цвет шляпы, то для точного понимания цвета шляпы нужно гарантированно опросить рыцарей больше, чем обывателей. В худшем случае, среди опрошенных могут оказаться все обыватели острова, т. е. 15 человек; значит всего нужно опросить не менее 31 человека, чтобы мнение рыцарей гарантированно преобладало.