9 класс. Первый вариант

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

Решение. Если $a = b$, то любой x является решением уравнения. Если $a \neq b$, то нам нужно доказать, что квадратный трехчлен имеет корень. Для этого достаточно проверить, что его дискриминант неотрицателен. Дискриминант, деленный на 4, равен

$$(a^3 - b^3)^2 - (a^2 - b^2)(a^4 - b^4) = a^4b^2 + a^2b^4 - 2a^3b^3 = a^2b^2(a - b)^2,$$

что всегда не меньше нуля.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Както раз встретились 19 островитян. Трое из них сказали: «Ровно трое из нас лжецы», затем шестеро из остальных сказали: «Ровно шестеро из нас лжецы», наконец, девять из оставшихся сказали: «Ровно девять из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 9, 18 или 19.

Решение. Пусть третья фраза верна. Тогда все говорившие ее — рыцари, и лжецов должно быть ровно девять. Поэтому все говорившие остальные фразы — лжецы. Их девять, а значит, промолчавший — рыцарь, и такая ситуация возможна. Пусть третья фраза неверна. Тогда говорившие ее — лжецы, и лжецов не менее девяти. Поэтому в первых двух группах тоже лгут. Следовательно, лжецов не менее 18. Последний же может быть кем угодно.

3. Вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a^6+b^6+c^6+d^6 = 64$. Найдите наибольшее значение выражения $a^7 + b^7 + c^7 + d^7$.

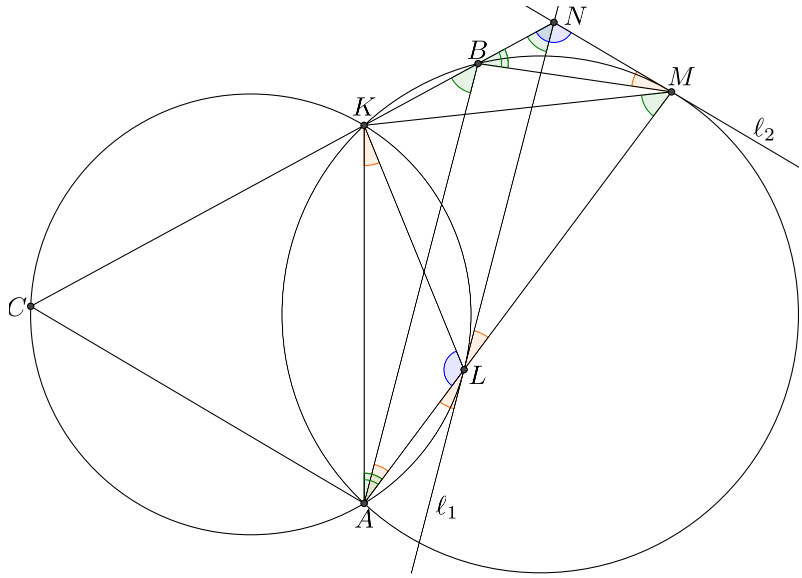
Ответ: 128

Решение. По условию $a^6 \leqslant a^6+b^6+c^6+d^6 = 64$, поэтому $a \leqslant 2$. Аналогично получаем, что $b \leqslant 2$, $c \leqslant 2$ и $d \leqslant 2$. Следовательно,

$$a^7 + b^7 + c^7 + d^7 = a \cdot a^6 + b \cdot b^6 + c \cdot c^6 + d \cdot d^6 \leqslant 2(a^6 + b^6 + c^6 + d^6) = 2 \cdot 64 = 128.$$

Равенство достигается, когда $a = 2$, $b = c = d = 0$. Поэтому $a^7 + b^7 + c^7 + d^7$ не превосходит 128 и может ему равняться.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. К описанной окружности треугольника AKC проведена касательная ℓ_1, параллельная прямой AB и ближайшая к ней. Она коснулась окружности в точке L. Прямая AL пересекла описанную окружность треугольника ABK в точке M ($M \neq A$). К этой окружности в точке M проведена касательная ℓ_2. Докажите, что прямые BK, ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в одной точке.



Решение. Пусть N — точка пересечения прямых BC и ℓ_1. Если мы докажем, что NM — касательная к описанной окружности треугольника ABK, то точка N будет лежать на прямой ℓ_2, а значит, прямые BK, ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в одной точке.

Поскольку прямые AB и LN параллельны, а четырехугольник $AMBK$ вписанный, $\angle LNK = \angle ABK = \angle AMK$. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ вписанный и, значит, $\angle MNK = \angle ALK$. Четырехугольник $AMBK$ вписанный, поэтому $\angle MBN = \angle MAK$. Следовательно, $\angle AKL = \angle BMN$. Поскольку угол между касательной и секущей равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, которую стягивает секущая, $\angle AKL = \angle MLN$. Таким образом, $\angle BMN = \angle AKL = \angle MLN = \angle BAM$ (последнее — из параллельности прямых AB и LN). Стало быть, NM — касательная к описанной окружности треугольника ABK.

5. Дана клетчатая доска 2020×2021. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом квадрате 4×4 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

Ответ: Вася

Решение. Вася должен ходить так, чтобы Петя не смог выиграть следующим ходом. Покажем, что он всегда сможет этого добиться. Если на доске есть пара непересекающихся пустых квадратов 4×4, Петя должен поставить фишку так, чтобы они остались и после его хода. Если такой ход невозможен, то на доске свободно всего два непересекающихся пустых квадрата 4×4, а остальные клетки заняты фишками. Следовательно, на доску поставлено $2020 \cdot 2021 - 32$ фишек. Их четное число и, значит, сейчас ход Пети. Если же любые два пустых квадрата 4×4 пересекаются, то найдется клетка, общая для всех квадратов. Тогда Вася поставит фишку в эту клетку и выиграет.

6. Найдите все пары такие простых чисел p и q, что $p^2+5pq+4q^2$ является квадратом натурального числа.

Ответ: $(13,3)$, $(7,5)$, $(5,11)$

Решение. Пусть $p^2+5pq+4q^2=n^2$ для некоторого натурального n. Тогда

$$pq = n^2-(p+2q)^2 = (n-p-2q)(n+p+2q).$$

Левая часть раскладывается в произведение двух чисел, одно из которых целое, а другое натуральное, четырьмя способами: $pq\cdot 1$, $p\cdot q$, $q\cdot p$ и $1\cdot pq$. Число $n+p+2q$ больше и p, и q, поэтому первые три случая невозможны. Стало быть, $n-p-2q=1$ и $n+p+2q=pq$. Таким образом, $2p+4q=pq-1$. Следовательно, $(p-4)(q-2)=9$ и, значит, $p-4=\pm1,\pm3,\pm9$. Тогда $p=4\pm1$, 4 ± 3 или 4 ± 9. Из них простыми числами будут только 3, 5, 7 и 13. Соответствующими им q будут -7, 11, 5 и 3. Поэтому первый вариант не подходит, а остальные подходят.

9 класс. Второй вариант

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

Решение. Если $a = b$, то любой x является решением уравнения. Если $a \neq b$, то нам нужно доказать, что квадратный трехчлен имеет корень. Для этого достаточно проверить, что его дискриминант неотрицателен. Дискриминант, деленный на 4, равен

$$(a^5 - b^5)^2 - (a^4 - b^4)(a^6 - b^6) = a^6b^4 + a^4b^6 - 2a^5b^5 = a^4b^4(a - b)^2,$$

что всегда не меньше нуля.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 28 островитян. Двое из них сказали: «Ровно двое из нас лжецы», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из нас лжецы», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из нас лжецы», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 14 или 28.

Решение. Пусть последняя фраза верна. Тогда все говорившие ее — рыцари, и лжецов должно быть ровно 14. Поэтому все говорившие остальные фразы — лжецы и такая ситуация возможна. Пусть последняя фраза неверна. Тогда говорившие ее — лжецы и лжецов не менее 14. Поэтому первые три фразы неверны и, значит, в первых трех группах тоже лгут. Поэтому все встретившиеся — лжецы.

3. Сумма неотрицательных чисел a, b и c равна 3. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + 2ca$.

Ответ: $\frac{9}{2}$

Первое решение. По условию

$$9 = (a+b+c)^2 = 2(ab+bc+ca) + a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(ab+bc+ca) + b^2 + 2ca \geqslant 2(ab+bc+2ca).$$

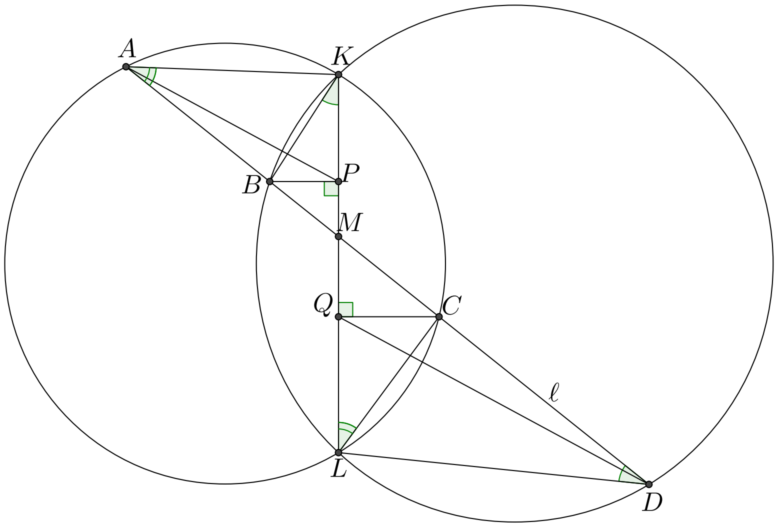
Равенство достигается, когда $b = 0$ и $a = c = \frac{3}{2}$. Поэтому наибольшим значением будет $\frac{9}{2}$.

Второе решение. Заметим, что

$$ab + bc + 2ca = (a+c)(3-a-c) + 2ca = 3a + 3c - a^2 - c^2 = \frac{9}{2} - \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(c - \frac{3}{2}\right)^2 \leqslant \frac{9}{2},$$

и равенство достигается, когда $a = c = \frac{3}{2}$. Поэтому наибольшим значением будет $\frac{9}{2}$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках K и L. Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точках A и C, а окружность ω_2 — в точках B и D, причем точки идут на прямой ℓ в алфавитном порядке. Обозначим через P и Q соответственно проекции точек B и C на прямую KL. Докажите, что прямые AP и DQ параллельны.



Решение. Обозначим точку пересечения прямых KL и AD через M. Из вписанности четырехугольника $BKDL$ заключаем, что $\angle BKL = \angle BDL$. Поэтому треугольники BKM и LDM подобны и, значит, $\frac{BM}{KM} = \frac{LM}{DM}$. Из вписанности четырехугольника $AKCL$ заключаем, что $\angle CAK = \angle CLK$. Поэтому треугольники AKM и LCM подобны и, значит, $\frac{AM}{KM} = \frac{LM}{CM}$. Таким образом, $\frac{AM}{BM} = \frac{DM}{CM}$. Поскольку прямые BP и CQ перпендикулярны прямой KL, треугольники BPM и CQM подобны и, значит, $\frac{BM}{CM} = \frac{PM}{QM}$. Следовательно, $\frac{PM}{QM} = \frac{BM}{CM} = \frac{AM}{DM}$. Стало быть, треугольники APM и DQM подобны по углам и отношению сторон. Тогда $\angle APM = \angle DQM$ и, значит, прямые AP и DQ параллельны.

5. Дана клетчатая доска 2021×2021. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом прямоугольнике 3×5 и 5×3 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

Ответ: Петя

Решение. Петя должен ходить так, чтобы Вася не смог выиграть следующим ходом. Покажем, что он всегда сможет этого добиться. Если на доске есть пара непересекающихся пустых прямоугольников 3×5, Петя должен поставить фишку так, чтобы они остались и после его хода. Если такой ход невозможен, то на доске свободно всего два непересекающихся пустых прямоугольника 3×5, а остальные клетки заняты фишками. Следовательно, на доску поставлено $2021^2 - 30$ фишек. Их нечетное число и, значит, сейчас ход Васи. Если же любые два пустых прямоугольника 3×5 пересекаются, то найдется клетка, общая для всех квадратов. Тогда Петя поставит фишку в эту клетку и выиграет.

6. Найдите все такие натуральные числа n, что число $2^n + n^2 + 25$ является кубом простого числа.

Ответ: $n = 6$

Решение. Пусть $2^n + n^2 + 25 = p^3$ для некоторого простого числа p. Поскольку $p > 3$, p — нечетное простое число. Тогда n — четное число, и 2^n дает остаток 1 при делении на три. Если n не делится на три, то n^2 дает остаток 1 при делении на три, а тогда $2^n + n^2 + 25$ кратно трем, что невозможно. Таким образом, n делится на шесть и можно записать $n = 6k$. Следовательно, $2^n + n^2 + 25 = 64^k + 36k^2 + 25 > (4^k)^3$. Поэтому

$$64^k + 36k^2 + 25 \geqslant (4^k + 1)^3 = 64^k + 3 \cdot 16^k + 3 \cdot 4^k + 1.$$

Если $k \geqslant 2$, то $3 \cdot 4^k > 25$ и $3 \cdot 16^k \geqslant 36k^2$ (последнее вытекает, например, из легко проверяемого по индукции неравенства $4^k \geqslant 6k$). Таким образом, $k = 1$ и $n = 6$. Осталось убедиться, что такое n подходит: $2^6 + 6^2 + 25 = 125 = 5^3$.

9 класс. Третий вариант

1. Найдите все такие значения a, для которых квадратные трехчлены $x^2 + 2x + a$ и $x^2 + ax + 2 = 0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

Ответ: $a = -4$

Решение. Если x_1 и x_2 — корни трехчлена $x^2 + px + q$, то по теореме Виета

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q.$$

Следовательно, нужно найти такие числа a, для которых $2^2 - 2a = a^2 - 2 \cdot 2$. Таким образом, надо решить уравнение $a^2 + 2a - 8 = 0$. Его корнями являются $a = -4$ и $a = 2$. Первый вариант подходит, а второй вариант не подходит, поскольку трехчлен $x^2 + 2x + 2$ не имеет корней.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

Ответ: нет

Решение. Поскольку 2021 — нечетное число, на острове либо нечетное число рыцарей и четное число лжецов, либо нечетное число лжецов и четное число рыцарей. Первый случай невозможен, поскольку оба заявления ложны и, значит, никакой рыцарь не мог сделать ни первое, ни второе заявление. Во втором случае оба заявления истины, поэтому никакой лжец не мог сделать ни первое, ни второе заявление.

3. Для произвольных вещественных чисел a и b ($b \neq 0$) найдите наименьшее значение выражения $a^2 + b^2 + \frac{a}{b} + \frac{1}{b^2}$.

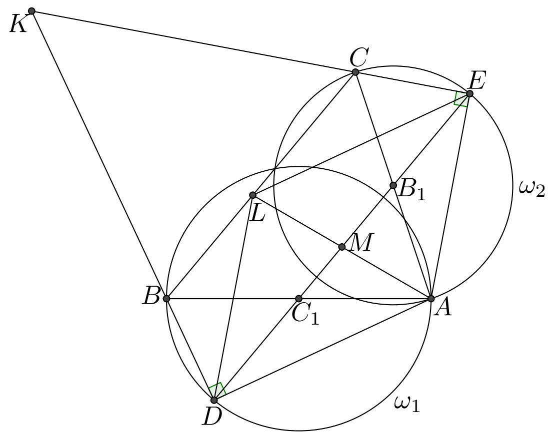
Ответ: $\sqrt{3}$

Решение. Поскольку

$$a^2 + b^2 + \frac{a}{b} + \frac{1}{b^2} = \left(a + \frac{1}{2b}\right)^2 + b^2 + \frac{3}{4b^2} \geqslant b^2 + \frac{3}{4b^2} \geqslant 2\sqrt{b^2 \cdot \frac{3}{4b^2}} = \sqrt{3},$$

выражение $a^2 + b^2 + \frac{a}{b} + \frac{1}{b^2}$ всегда не меньше $\sqrt{3}$. Равенство достигается, если $a + \frac{1}{2b} = 0$ и $b^2 = \frac{3}{4b^2}$, т. е. когда $b = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$ и $a = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2. Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1, лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB. Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2, лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC. Прямые BD и CE пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE.



Решение. Пусть M — середина отрезка DE, а прямые AM и BC пересекаются в точке L. Поскольку B_1C_1 — средняя линия треугольника ABC, прямые B_1C_1 и BC параллельны. Значит, B_1M — средняя линия треугольника ACL и, в частности, M — середина отрезка AL. Тогда диагонали четырехугольника $ADLE$ делятся своей точкой пересечения пополам, поэтому $ADLE$ является параллелограммом. Следовательно, $AD \parallel LE$ и $AE \parallel DL$. Поскольку угол $\angle AEC$ опирается на диаметр окружности ω_2, прямые AE и KE перпендикулярны, а, значит, прямые DL и KE также перпендикулярны. Аналогично $AD \perp KD$ и, значит, $EL \perp KD$. Таким образом, L — ортоцентр треугольника KDE.

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

Ответ: нет

Решение. Первым своим ходом Вася выбирает одну из угловых клеток и возводит в ней по одной из двух внешних сторон стенку. Следующими тремя своими ходами он строит аналогичные стенки для трех оставшихся угловых клеток. За эти четыре хода Петя не успеет дойти до края доски. Если каким-то ходом Петя передвигает фишку в клетку на краю доски, то в ответ Вася строит стенку по внешней стороне этой клетки. Если каким-то ходом Петя передвигает фишку в угловую клетку, то Вася в ответ построит стенку на еще незастроенной внешней стороне этой клетки. В остальных случаях, а также если какая-то из нужных уже была построена ранее, Вася строит произвольную стенку. При такой игре ни с какой из крайних клеток Петя не сможет выйти за пределы доски. Значит, фишка никогда не покинет доску и Петя не сможет выиграть.

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n+3)$ кратно трем.

Решение. Обозначим через a_n количество различных нечетных простых делителей числа $n(n+3)$. Предположим, что чисел, для которых a_n кратно трем, лишь конечное количество. Тогда для некоторого m при $n \geqslant m$ число a_n не будет делиться на три.

Рассмотрим произведение

$$n(n+1)(n+3)(n+4) = n(n+4) \cdot (n+1)(n+3) = n(n+4) \cdot \big(n(n+4)+3\big).$$

Посмотрим какие общие простые делители могут быть у чисел $n(n+3)$ и $(n+1)(n+4)$. Числа n и $n+1$, а также числа $n+3$ и $n+4$ взаимно просты. Числа $n+1$ и $n+3$, а также числа n и $n+4$ могут иметь в качестве общего простого делителя только двойку. Следовательно, $a_{n(n+4)} = a_n + a_{n+1}$. Если $n \geqslant m$, то a_n, a_{n+1} и $a_{n(n+4)}$ не делятся на три. Но это будет не так, если остатки у чисел a_n и a_{n+1} различны. Это означает, что остатки у чисел a_n и a_{n+1} при $n \geqslant m$ одинаковы. Тогда все остатки от деления на три у чисел a_n при $n \geqslant m$ одинаковы и не равны нулю. Но это противоречит равенству $a_{n(n+4)} = a_n + a_{n+1}$.

9 класс. Четвертый вариант

1. Найдите все такие значения a, для которых квадратные трехчлены $x^2 - 6x + 4a$ и $x^2 + ax + 6 = 0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

Ответ: $a = -12$

Если x_1 и x_2 — корни трехчлена $x^2 + px + q$, то по теореме Виета

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q.$$

Следовательно, нужно найти такие числа a, для которых $6^2 - 8a = a^2 - 2\cdot 6$. Таким образом, надо решить уравнение $a^2 + 8a - 48 = 0$. Его корнями являются $a = -12$ и $a = 4$. Первый вариант подходит, а второй вариант не подходит, поскольку трехчлен $x^2 - 6x + 16$ не имеет корней.

2. На острове живут лжецы и рыцари, всего 2021 человек. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. В один прекрасный день все жители острова построились в шеренгу. После этого каждый житель острова заявил: «Количество стоящих справа от меня лжецов больше количества стоящих слева от меня рыцарей». Сколько на острове рыцарей? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 1010

Решение. Самый правый островитянин не может говорить правду, поскольку левее его вообще никого нет и, в частности, нет лжецов. Поэтому он лжец. Самый левый островитянин не может врать, поскольку левее его есть хотя бы один лжец, а правее его нет никого и, в частности, нет рыцарей. Поэтому он рыцарь. Временно уберем этих двоих из шеренги. Для всех остальных количество лжецов справа и количество рыцарей слева уменьшилось на единицу, поэтому истинность и ложность их утверждений не поменялась. Поэтому, проделав еще раз то же рассуждение, мы установим, что самый правый островитянин — лжец, а самый левый — рыцарь. Снова уберем двух крайних островитян, и так будем действовать до тех пор, пока не останется ровно один житель. Он врет и поэтому является лжецом. Таким образом, в середине шеренги стоит лжец, все справа от него также лжецы, а все слева от него — рыцари. Следовательно, рыцарей 1010.

3. Для произвольных вещественных чисел a и b ($a \neq 0$) найдите наименьшее значение выражения $\frac{1}{a^2} + 2a^2 + 3b^2 + 4ab$.

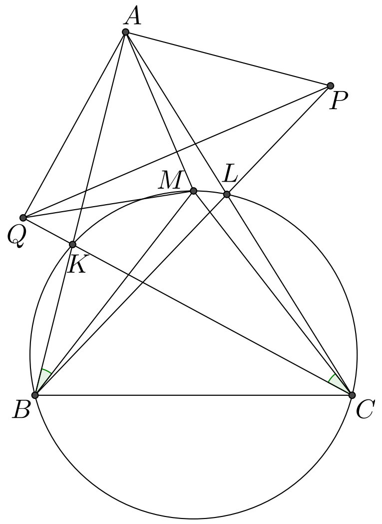
Ответ: $\sqrt{\frac{8}{3}}$

Поскольку

$$\frac{1}{a^2} + 2a^2 + 3b^2 + 4ab = \left(\sqrt{3}b + \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2a^2}{3} + \frac{1}{a^2} \geqslant \frac{2a^2}{3} + \frac{1}{a^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{2a^2}{3} \cdot \frac{1}{a^2}} = \sqrt{\frac{8}{3}},$$

выражение $\frac{1}{a^2} + 2a^2 + 3b^2 + 4ab$ всегда не меньше $\sqrt{\frac{8}{3}}$. Равенство достигается, если $\sqrt{3}b + \frac{2a}{\sqrt{3}} = 0$ и $\frac{2a^2}{3} = \frac{1}{a^2}$, т. е. когда $a = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$ и $b = -\left(\frac{2}{3}\right)^{3/4}$.

4. Проходящая через точки B и C окружность ω пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно ($K \neq B$ и $L \neq C$). На луче BL отмечена такая точка P, что $BP = AC$, а на луче CK отмечена такая точка Q, что $CQ = AB$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника APQ лежит на ω.



Решение. Пусть точка M — середина дуги BKC. Тогда хорды BM и CM стягивают равные углы и поэтому равны. Кроме того углы $\angle KBM$ и $\angle KCM$ равны, поэтому $\angle ABM = \angle QCM$. Следовательно, треугольники ABM и QCM равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = CQ$ по условию). Стало быть, $AM = QM$. Аналогично доказывается, что $AM = PM$. Таким образом, точка M является центром окружности, описанной вокруг треугольника APQ.

5. Дана клетчатая доска 3×2021 (3 клетки по вертикали и 2021 клетка по горизонтали) и неограниченный запас картонных полосок 1×3. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди без наложений размещают на доске полоски (по клеточкам), по одной полоске за ход. Петя кладет свои полоски горизонтально, а Вася — вертикально. Проигрывает игрок, не имеющий хода, начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

Ответ: Петя

Решение. Поскольку на доске всего $3 \cdot 2021$ клеток, обоими игроками в сумме будет сделано не больше, чем 2021 ход. Покажем, как должен действовать Петя, чтобы выиграть. Он мысленно разделит доску на 673 квадрата 3×3 и один прямоугольник 2×3. Первыми своими ходами Петя будет размещать полоски в тех квадратах, в которых еще ничего нет. И действовать по этой схеме он будет до тех пор, пока такое возможно. Поскольку своим ходом Вася может занять не больше одного квадрата, Петя сделает не меньше, чем 337 ходов. В прямоугольники, занятые Петиными полосками, Вася не сможет походить. Поэтому дальше Петя может сделать еще по крайней мере $2 \cdot 337$ ходов. А, значит, всего он сможет сделать не меньше, чем $337 + 2 \cdot 337 = 1011$ ходов. Но это больше половины от общего числа допустимых ходов. Поэтому на каждый ход Васи у Пети будет возможность ответить, а если Вася не проиграет раньше, то после 1011 хода Пети доска будет полностью покрыта и Вася не сможет походить.

6. Найдите все такие простые числа p и q, что $p^{q+1}+q^{p+1}$ является квадратом натурального числа.

Ответ: $p=q=2$

Решение. Ясно, что $p=q=2$ подходит. Пусть p нечетно и $p^{q+1}+q^{p+1}=n^2$. Тогда

$$p=2k-1 \quad \text{и} \quad p^{q+1}=n^2-q^{2k}=(n-q^k)(n+q^k).$$

Обозначим наибольший общий делитель чисел $n-q^k$ и $n+q^k$ через d. Тогда d является степенью p и число $2q^k=(n+q^k)-(n-q^k)$ делится на d. Поскольку p нечетно, отсюда следует, что либо $d=1$, либо $p=q$. В последнем случае $n^2=p^{q+1}+q^{p+1}=2p^{p+1}$, что невозможно, так как p нечетно. Стало быть, $d=1$. Множители $n-q^k$ и $n+q^k$ являются степенью p, поэтому $n-q^k=1$ и $n+q^k=p^{q+1}$. Следовательно, $2q^k=p^{q+1}-1$. Если q нечетно, что левая часть дает остаток 2 при делении на четыре, а правая часть кратна четырем. Таким образом, $q=2$ и, значит,

$$2^{k+1}=p^3-1=(p-1)(p^2+p+1)=2k(4k^2-2k+1).$$

Поэтому $k=2^m$ и $2^\ell=4k^2-2k+1=2^{2m+2}-2^{m+1}+1$. Последнее равенство невозможно, ибо число $2^{2m+2}-2^{m+1}+1$ больше единицы и нечетно, а значит, не является степенью двойки.