Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2020/2021 учебный год

Задания для 6–7 классов

1. (20 баллов) *На доске выписали все двузначные числа, делящиеся на 5, у которых число десятков больше числа единиц. Таких чисел оказалось A штук. Затем выписали все двузначные числа, делящиеся на 5, у которых число десятков меньше числа единиц. Таких чисел оказалось B штук. Чему равно $100B + A$?*

Ответ: 413.

Решение: Будем записывать двузначные числа в виде $\overline{xy}$, где x — число десятков, а y — число единиц.

Вычислим, чему равно A. Нам нужны двузначные числа, делящиеся на 5, т. е. числа, в которых y равно либо 0, либо 5. Заметим, что если $y = 0$, то x может принимать любое значение от 1 до 9, и это даст нам 9 чисел. А если $y = 5$, то x может принимать значения только от 6 до 9, что даст нам ещё 4 числа. В итоге получаем 13 чисел.

Вычислим B. Здесь может быть только случай $y = 5$, потому что x — число десятков — меньше 0 быть не может. Значит, x может принимать значения от 1 до 4. Поэтому $B = 4$. Отсюда получаем, что $100B + A = 400 + 13 = 413$.

2. (20 баллов) *Найдите количество различных четырёхзначных чисел, которые можно получить, переставляя цифры числа 2021 (включая и это число).*

Ответ: 9.

Решение: Количество вариантов можно найти перебором вариантов перестановок цифр: 2021, 2012, 2201, 2210, 2102, 2120, 1022, 1202, 1220.

Посчитать количество вариантов можно также, применяя методы комбинаторики. Позицию нуля можно выбрать тремя способами, поскольку он не должен быть первым. Затем тремя способами выбираем позицию 1, а на двух оставшихся местах ставим двойки. В итоге получается $3 \cdot 3 = 9$ возможных чисел.

3. (30 баллов) *На уроке математики каждому из семи гномов нужно найти одно двузначное число, при прибавлении к которому числа 18 получалось бы число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Могут ли все числа, найденные гномами, оказаться различными?*

Ответ: Да, могут.

Решение: Будем записывать двузначные числа в виде $\overline{xy}$, где x — число десятков, а y — число единиц.

Найдем все допустимые числа. По условию $10x + y + 18 = 10y + x$. Преобразуем:

$$10x + y + 18 = 10y + x \Leftrightarrow 18 = 9y - 9x \Leftrightarrow y = x + 2.$$

Поэтому нам подходят числа 13, 24, 35, 46, 57, 68, 79. Этих чисел столько же, сколько и гномов. Значит, гномы могли найти разные числа.

4. (30 баллов) *Пусть натуральные числа m и n удовлетворяют равенству $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2020}$. Докажите, что m и n не могут одновременно быть нечетными.*

Решение: Преобразуем условие задачи к виду

$$2020(n + m) = mn.$$

Левая часть этого равенства является четным числом, следовательно, четна и его правая часть. Поэтому хотя бы одно из чисел m и n должно быть четным.

5. (50 баллов) *При распределении земельных участков фермеру Новоселову выделили 2 квадратных участка разной площади, имеющих целочисленные стороны. Возможно ли выделить фермеру Малинникову также 2 квадратных участка с целочисленными сторонами, чтобы суммарная площадь участков Малинникова была в 2 раза больше суммарной площади участков Новоселова?*

Ответ: Да, возможно.

Решение: Обозначим через x и y стороны участков, распределенных фермеру Новоселову. Будем считать, что $x > y$. Покажем, как по x и y найти длины сторон участков, которые должны быть выделены фермеру Малинникову в соответствии с условием задачи.

Пусть $x^2 + y^2 = a$. Тогда рассмотрим $2a$:

$$2a = (x + y)^2 - 2xy + x^2 + y^2 = (x - y)^2 + (x + y)^2.$$

Таким образом, суммарная площадь квадратных участков со сторонами $x+y$ и $x-y$ будет в два раза больше суммарной площади квадратных участков со сторонами x и y. Такие участки и нужно выделить фермеру Малинникову.

6. (50 баллов) *Пусть последовательность чисел A такова, что $A_1 = 3$, $A_2 = 8$, $A_3 = 13, \ldots$. Докажите, что существует бесконечное количество числовых последовательностей B со следующими свойствами:*

1) $B_1 = 7$;

2) $B_k = B_{k-1} + d$, где d — некоторое число ($k = 2, 3, 4, \ldots$);

3) имеют с последовательностью A бесконечно много совпадающих членов.

Решение: Заметим, что если B_2 входит в A, то прогрессия B удовлетворяет условию 3). Действительно, если x — общий член A и B, то $x + 5d$ — тоже. Рассмотрим прогрессии B с разностями $A_i - 7$, где $i \geq 3$. Все они различны, и у каждой B_2 является также членом A.