Решения. **1.** а) Можно: в центре ставим 1, а по кругу ставим подряд 2, 3, 4, 5, 6, 7. Очевидно, число в центре взаимно просто с остальными. А вдоль круга рядом стоят либо соседние числа, которые взаимно просты, либо 2 и 7 — и они тоже взаимно просты.

б) Нельзя. Поскольку каждое верхнее число соединено с каждым нижним, все четные числа — 2, 4, 6, 8, 10 — должны стоять в нижнем ряду. Тогда числа 3 и 9 тоже должны быть в нижнем ряду, поскольку они не соединены с 6. Таким образом, в верхнем ряду окажутся числа 1, 5 и 7. Но в этом случае 5 и 10 будут соединены отрезком, что невозможно.

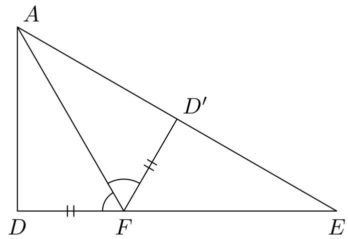
в) Нельзя. Очевидно, в центре должно стоять нечетное число. Но тогда по кругу стоит 2021 число, из которых 1011 четных. Значит, два четных числа окажутся рядом.

2. а) Может. Пусть $a < b$, Тогда a/b — правильная дробь со знаменателем не больше 12. Нетрудно подобрать 6 равных дробей со знаменателями не больше 12: $1/2 = 2/4 = 3/6 = \dots = 6/12$. Каждая такая дробь задает места пары чисел a, b в каскаде: например, $3/6$ соответствует каскаду, где $a = 3x$, $b = 6x$. Чтобы существовали такие каскады, необходимо, чтобы a делилось на числа от 1 до 6. Подходят, например $a = 60$, $b = 120$. Требуемые каскады порождаются числами $r = 60$, 30, 20, 15, 12, 10.

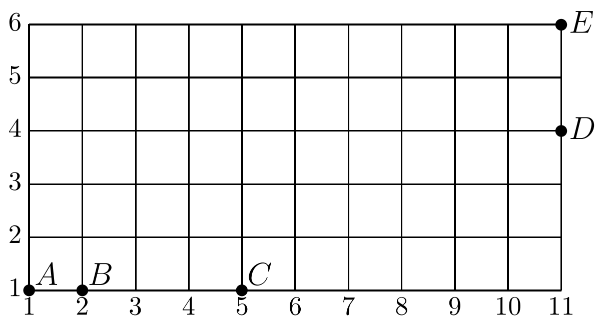
б) Да. Зададим раскраску следующим образом. Запишем каждое натуральное число n в виде $n = 13^s m$, где m не делится на 13. Пусть $r(m)$ обозначает остаток от деления m на 13. Будем считать, что $r(m)$ — это номер цвета, в который покрашено число n. Поскольку нулевой остаток в этой конструкции получиться не может, мы определили раскраску в 12 цветов. Осталось заметить, что если число $x = 13^s m$ порождает каскад, то при делении на 13 числа из каскада дают такие же остатки, как и числа m, $2m$, $\dots$, $12m$. Так как число m имеет ненулевой остаток, все эти остатки различны по модулю 13.

3. Нельзя. Заметим, что если мы укажем точку A, для которой $\angle DAF = \angle FAE$, то отложив на луче AD отрезок $AB = 2AF$, а на луче AE отрезок $AC = 2AE$, мы получим треугольник ABC, удовлетворяющий условию задачи. При этом положение вершин B и C однозначно определяется положением вершины A.

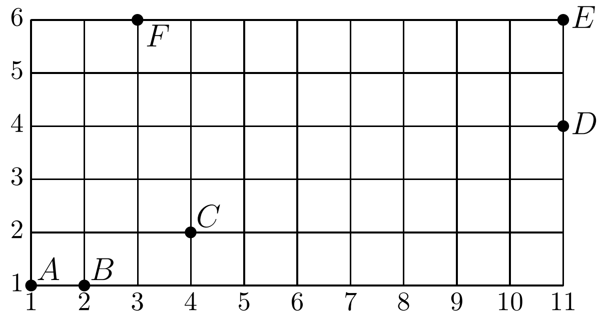
Поэтому достаточно показать, что вершина A может быть выбрана неоднозначно. Отложим от точки F отрезок FD', равный FD, в произвольном «северо-восточном» направлении. Обозначим через A точку пересечения прямой ED' с биссектрисой угла DFD'. Тогда треугольники DFA и $D'FA$ равны по двум сторонам и углу, откуда $\angle DAF = \angle FAD' = \angle FAE$, что нам и требовалось. Ясно, что при разных положениях отрезка FD' будут получаться разные положения точки A.



4. а) Можно. Построим требуемую конфигурацию. Удобно выбирать перекрестки либо только на самой нижней, либо только на самой правой улице — тогда между ними легко считать расстояния, двигаясь по этим улицам. На приведенной ниже картинке $1 = AB$, $2 = DE$, $3 = BC$, $4 = AC$, $9 = CD$, $11 = CE$, $12 = BD$, $13 = AD$, $14 = BE$, $15 = AE$.



б) Можно. Требуемую конфигурацию построить трудно. Здесь $1 = AB$, $2 = DE$, $3 = BC$, $4 = AC$, $5 = CF$, $6 = BF$, $7 = AF$, $8 = EF$, $9 = CD$, $10 = DF$, $11 = CE$, $12 = BD$, $13 = AD$, $14 = BE$, $15 = AE$.



в) Нельзя. В нашем городе все расстояния между перекрестками — целые числа. Самое большое из них — это расстояние между перекрестками, находящимися в противоположных углах города, оно равно 15. Но семь перекрестков определяют 21 попарное расстояние, поэтому среди них обязательно встретятся одинаковые.