Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2020/2021 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) *Правила игры следующие: из 64 различных предметов на каждом шаге игроку нужно сформировать множество предметов, ранее не упоминавшееся в игре, в котором количество предметов равно возрасту игрока в годах. Игроки делают ходы по очереди; начинать игру может любой из игроков; проигрывает тот, кто не может сделать ход. Множества предметов считаются различными, если они различаются хотя бы одним предметом или если они содержат разное количество предметов. В игре участвуют Василий и Федор; каждый из игроков имеет возможность сделать хотя бы один ход. Известно, что: а) Василий на 2 года старше Федора; б) Федору не менее 5 лет; в) Федор всегда выигрывает. Какое наименьшее количество лет может быть Василию?*

Ответ: 34 года.

Решение: Ход игры — выбор из 64 элементов некоторого подмножества, в котором столько элементов, сколько лет игроку. Таким образом, в задаче необходимо сравнить количества способов такого выбора: у какого игрока количество способов выбрать «свое» подмножество, т. е. C_{64}^{x}, больше, тот и будет всегда выигрывать. Пусть V — возраст Василия в годах, F — возраст Федора в годах. По условию: $5 \leq F$, $F + 2 = V$, $V \leq 64$ (поскольку каждый игрок может сделать ход, т. е. хотя бы одно сочетание выбрать можно). Также известно, что $C_{64}^{F} > C_{64}^{V}$ всегда (в случае равенства Федор проигрывал бы, если бы ходил первым). Требуется найти минимальное V, при котором выполняются все перечисленные условия.

Обозначим возраст Федора за x, а Василия — за $x+2$. Рассмотрим целочисленную функцию $x \mapsto C_{64}^{x}$. Она возрастает от 0 до 32 и убывает от 32 до 64. Кроме того, $C_{64}^{31} = C_{64}^{33}$. Поэтому неравенство $C_{64}^{x} > C_{64}^{x+2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x \geq 32$. Таким образом, минимальное значение $x + 2$ равно 34.

2. (10 баллов) *Министр К. издал распоряжение, что прием граждан будет осуществляться только в том случае, если количество способов выбрать из пришедших группу из четырех человек меньше количества способов выбрать из них группу из двух человек. Определите, каким может быть максимальное число граждан, чтобы министр их принял?*

Ответ: 5.

Решение: Количество способ выбрать из n человек группу из четырех человек равно C_n^4; группу из двух человек — C_n^2. Нас интересует максимальное натуральное n такое, что $C_n^4 < C_n^2$. Преобразуем:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} < \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow \frac{(n-2)(n-3)}{3\cdot 4} < 1.$$

Решая неравенство методом интервалов, получаем, что $-1 < n < 6$. Следовательно, максимальное n равно 5.

3. (20 баллов) *На уроке математики каждому из гномов нужно найти трехзначное число без нулевых цифр, кратное 3, при прибавлении к которому числа 297 получалось бы число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое минимальное число гномов должно быть на уроке, чтобы среди найденных ими чисел всегда нашлось хотя бы два одинаковых?*

Ответ: 19.

Решение: Пусть количество чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно N. Тогда в силу принципа Дирихле минимальное число гномов должно быть равно $N+1$.

Запишем трехзначное число как $\overline{xyz}$, где x — число сотен, y — число десятков, z — число единиц. Поскольку наряду с числом $\overline{xyz}$ рассматривается и число $\overline{zyx}$, то $x > 0$ и $z > 0$. По условию $100x + 10y + z + 297 = 100z + 10y + x$. Преобразуем:

$$99z - 99x = 297 \Leftrightarrow x = z - 3.$$

Так как $0 < x = z - 3 \leq 9$ и $z \leq 9$, то $0 < x \leq 6$. Таким образом, нам подходят 6 значений x. Каждому x соответствует одно значение z, а y — произвольное число от 1 до 9, при котором $\overline{xyz}$ кратно 3. Заметим, что

$$0 = (x+y+z) \mod 3 = (2x+y) \mod 3,$$

то есть любая пара (x, z) однозначно определяет $y \mod 3$. Среди чисел от 1 до 9 есть ровно 3 числа с заданным остатком от деления на 3. Поэтому условию задачи удовлетворяет $6\cdot 3 = 18$ чисел, а минимальное количество гномов равно 19.

4. (20 баллов) *Пусть множество $\boldsymbol{A}$ состоит из всех трёх-, пяти-, семи- и девятизначных чисел, в записи которых используются десятичные цифры 1, 2, …, n (не обязательно различные), а множество $\boldsymbol{B}$ — из всех двузначных, четырёх-, шести- и восьмизначных чисел, в записи которых используются десятичные цифры 1, 2, …, m (не обязательно различные). При каких m чисел в $\boldsymbol{B}$ будет не меньше, чем в $\boldsymbol{A}$, если $n = 6$?*

Ответ: $m = 8$ или $m = 9$.

Решение: Количество чисел в множестве $\boldsymbol{A}$ равно $6^3 + 6^5 + 6^7 + 6^9 = 1036624$. Количество чисел в множестве $\boldsymbol{B}$ равно $N_m = m^2 + m^4 + m^6 + m^8$ и N_m возрастает при увеличении m.

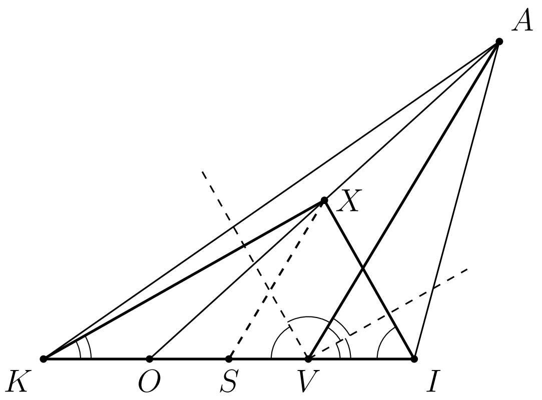
Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$N_7 = 5884900 < 1036624, \quad N_8 = 17043520 > 1036624.$$

Таким образом, нам подходят $m = 8$ и $m = 9$.

5. (30 баллов) *В треугольнике KIA на стороне KI отметили точку V такую, что $KI = VA$. Затем внутри треугольника отметили точку X такую, что угол XKI равен половине угла AVI, а угол XIK равен половине угла KVA. Пусть O — точка пересечения прямой AX и стороны KI. Верно ли, что $KO = VI$?*

Ответ: Да, верно.



Решение: Заметим, что угол KXI прямой (его стороны параллельны биссекрисам углов, составляющих в сумме развернутый угол). Пусть S — середина KI. Тогда S — центр описанной окружности прямоугольного треугольника KXI, откуда $XS = SK = KI/2 = AV/2$. Заметим, что $\angle XSI = \angle SKX + \angle KXS = 2\angle SKX = \angle AVI$, поскольку треугольник SXK равнобедренный. Значит, $XS \parallel AV$. Кроме того,

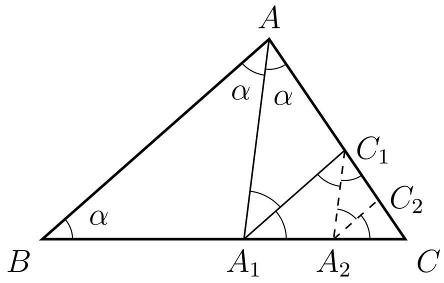
$$SX = SK = \frac{1}{2}KI = \frac{1}{2}AV.$$

Поэтому SX — средняя линия треугольника AOV. Отсюда $SO = SV$ и

$$KO = KS - SO = SI - SV = VI.$$

6. (30 баллов) *В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 6$ и $AC = 4$ проведена биссектриса AA_1 угла BAC. Далее, в треугольнике AA_1C проведена биссектриса A_1C_1 угла AA_1C; в треугольнике C_1A_1C проведена биссектриса C_1A_2 угла A_1C_1C; в треугольнике C_1A_2C проведена биссектриса A_2C_2 угла C_1A_2C; …; в треугольнике $C_{2020}A_{2020}C$ проведена биссектриса $C_{2020}A_{2021}$ угла $A_{2020}C_{2020}C$; в треугольнике $C_{2020}A_{2021}C$ проведена биссектриса $A_{2021}C_{2021}$ угла $C_{2020}A_{2021}C$. Докажите, что треугольники ABC и $A_{2021}C_{2021}C$ подобны и найдите коэффициент подобия этих треугольников.*

Ответ: Коэффициент подобия равен $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{2021}$.



Решение: Достаточно доказать, что треугольник C_1A_1C подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{4}{9}$. Продолжая проводить пары биссектрис C_iA_{i+1} и $A_{i+1}C_{i+1}$, получим последовательность подобных треугольников $CA_{i+1}C_{i+1}$, причем каждый следующий треугольник будет подобен предыдущему с коэффициентом подобия $\dfrac{4}{9}$.

Вычислим длину биссектрисы AA_1. По свойству биссектрисы $BA_1 : A_1C = AB : AC = 5 : 4$; откуда $BA_1 = \frac{10}{3}$, $A_1C = \frac{8}{3}$. Тогда

$$AA_1^2 = AB \cdot AC - BA_1 \cdot A_1C = \frac{100}{9}$$

и, следовательно, $AA_1 = \frac{10}{3} = BA_1$. Значит, треугольник ABA_1 равнобедренный и $\angle CAA_1 = \angle A_1AB = \angle ABA_1 = \alpha$. Угол AA_1C равен 2α как внешний для треугольника ABA_1. По условию

$$\angle C_1A_1C = \frac{1}{2}\angle AA_1C = \alpha = \angle ABC.$$

Значит, треугольники C_1A_1C и ABC подобны по двум углам, а коэффициент подобия равен $\frac{A_1C}{BC} = \frac{4}{9}$.

7. (40 баллов) *Положительные числа x, y, z таковы, что $xy + yz + zx = 6$. Верно ли, что*

$$\frac{1}{2\sqrt{2} + x^2(y+z)} + \frac{1}{2\sqrt{2} + y^2(x+z)} + \frac{1}{2\sqrt{2} + z^2(x+y)} \leq \frac{1}{xyz}?$$

Ответ: Да, верно.

Решение: По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим $2 = (xy + yz + zx)/3 \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, откуда $2\sqrt{2} \geq xyz$ Оценим каждое слагаемое отдельно:

$$\frac{1}{2\sqrt{2} + x^2(y+z)} = \frac{1}{2\sqrt{2} + x(xy+xz)} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2} + x(6-yz)} = \frac{1}{6x + 2\sqrt{2} - xyz} \leq \frac{1}{6x} = \frac{yz}{6xyz}.$$

Аналогично с двумя другими слагаемыми:

$$\frac{1}{2\sqrt{2} + y^2(x+z)} \leq \frac{xz}{6xyz}, \quad \frac{1}{2\sqrt{2} + z^2(x+y)} \leq \frac{xy}{6xyz}.$$

Складывая эти оценки, получаем

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+x^2(y+z)}+\frac{1}{2\sqrt{2}+y^2(x+z)}+\frac{1}{2\sqrt{2}+z^2(x+y)} \le \frac{yz+xz+xy}{6xyz}=\frac{1}{xyz}.$$

8. (40 баллов) *В 8-А классе n учеников ($n \ge 2$). Для них организованы кружки, каждый из которых посещают хотя бы двое. Каждые два кружка, у которых есть хотя бы два общих ученика, отличаются по количеству участников. Докажите, что кружков не более $(n-1)^2$.*

Решение: Достаточно доказать, что для каждого $2 \le k \le n$ имеется не более $\frac{n(n-1)}{k(k-1)}$ кружков, в которые ходят ровно k человек. Действительно, поскольку ни меньше 2, ни больше n человек в кружке не может быть, количество кружков не превосходит

$$n(n-1)\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}\right).$$

По индукции нетрудно доказать, что $\sum_{k=2}^{K}\frac{1}{(k-1)k}=1-\frac{1}{K}$. Таким образом, суммарное количество кружков не будет превосходить $n(n-1)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=(n-1)^2$.

Докажем утверждение. Зафиксируем k и будем рассматривать только кружки, в которые ходят ровно k школьников. В кружках, которые посещает некоторый школьник x, наборы из остальных $k-1$ участников не пересекаются, а всего для них доступно $n-1$ учеников. Значит, x может посещать не более $\frac{n-1}{k-1}$ кружков. Суммарное количество школьников во всех «списках участников кружков» не превосходит $\frac{n(n-1)}{k-1}$. Так как в каждом таком списке ровно k школьников, всего кружков не более $\frac{n(n-1)}{k(k-1)}$, что и требовалось доказать.

9. (40 баллов) *Найдите количество пар натуральных чисел m и n, удовлетворяющих равенству $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2020}$.*

Ответ: 45.

Решение: Преобразуем заданное равенство

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2020}\Leftrightarrow\frac{n+m}{m\cdot n}=\frac{1}{2020}\Leftrightarrow mn=2020(n+m)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow mn-2020n-2020m+2020^2-2020^2=0\Leftrightarrow(n-2020)(m-2020)=2020^2.$$

Решениями этого уравнения являются числа $m=d+2020$ и $n=\dfrac{2020^2}{d}+2020$, где d — произвольный делитель 2020^2. Осталось найти количество таких делителей. Заметим, что $2020^2=2^4\cdot 5^2\cdot 101^2$. Если d — делитель числа 2020^2, то 2 может входить в его разложение на простые множители в степенях $0,\ldots,4$, а 5 и 101 — в степенях $0,1,2$. Значит, общее число таких разложений равно $5\cdot 3\cdot 3=45$.