Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2017/2018 учебный год.

Задания для 8-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2017/2018 учебный год. 8-9 классы.

Вариант 1

1. Можно ли все натуральные числа от 1 до 2018 так расставить по кругу, что сумма любых трёх подряд стоящих чисел была нечётным числом?

Ответ: нет.

Решение. В каждой сумме трёх подряд стоящих чисел одно или три нечётных слагаемых. Во всех суммах по одному нечётному слагаемому быть не может. Действительно, весь круг покрывается 673 тройками, а всего он содержит 1009 нечётных чисел. Значит, хотя бы в одной тройке нечётных чисел не меньше двух, то есть три. Итак, есть тройка с тремя нечётными числами. Рассмотрим такую тройку и пойдём от нее по часовой стрелке, пока не встретим первое чётное число. Оно с двумя предыдущими нечётными даёт чётную сумму — противоречие.

2. Даны ненулевые вещественные числа a, b и c. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ расположена выше прямой $y = cx$. Докажите, что парабола $y = cx^2 - bx + a$ расположена выше прямой $y = cx - b$.

Решение. То, что парабола $y = ax^2 + bx + c$ расположена выше прямой $y = cx$, равносильно двум условиям: ветви параболы направлены вверх, т. е. $a > 0$, и парабола не пересекается с прямой, т. е. уравнение $ax^2+bx+c = cx$ не имеет решений. Значит, дискриминант уравнения отрицателен, т. е. $(b-c)^2-4ac < 0$. В частности, это означает, что $c > 0$. Тогда ветви параболы $y = cx^2 - bx + a$ также направлены вверх, и нам нужно лишь доказать, что у нее нет пересечений с прямой, т. е. что уравнение $cx^2 - bx + a = cx - b$ не имеет решений. Для этого нужно проверить отрицательность его дискриминанта. Но он равен

$$(-b - c)^2 - 4c(a + b) = b^2 + 2bc + c^2 - 4ac - 4bc =$$
$$= b^2 - 2bc + c^2 - 4ac = (b - c)^2 - 4ac < 0.$$

3. Произведение положительных чисел a, b, c и d равно 1. Докажите неравенство

$$\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2} + \frac{b^4 + c^4}{b^2 + c^2} + \frac{c^4 + d^4}{c^2 + d^2} + \frac{d^4 + a^4}{d^2 + a^2} \geqslant 4.$$

Первое решение. Поскольку $2(a^4 + b^4) \geqslant (a^2 + b^2)^2$, справедливо неравенство

$$\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2} \geqslant \frac{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Сложив его с тремя аналогичными неравенствами, получим, что левая часть доказываемого неравенства не меньше, чем $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 2ab + 2cd \geqslant 4\sqrt{abcd} = 4$.

Второе решение. Заметим, что $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2} \geqslant ab$. Действительно, это неравенство после домножения на знаменатель превращается в неравенство

$$(a^3-b^3)(a-b) = a^4+b^4-a^3b-ab^3 \geqslant 0.$$

Но в таком виде оно очевидно, поскольку скобки в левой части имеют одинаковый знак, и их произведение неотрицательно.

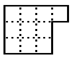
Следовательно,

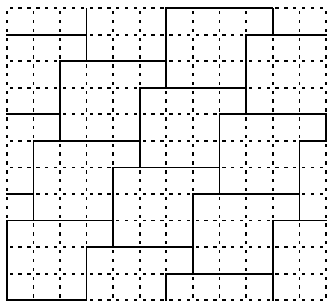
$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}+\frac{b^4+c^4}{b^2+c^2}+\frac{c^4+d^4}{c^2+d^2}+\frac{d^4+a^4}{d^2+a^2} \geqslant ab+bc+cd+da \geqslant 4.$$

В последнем неравенстве мы дважды воспользовались неравенством о средних для двух чисел: $ab+cd \geqslant 2\sqrt{ab\cdot cd}=2$ и $bc+da \geqslant 2\sqrt{bc\cdot da}=2$.

4. Клетки бесконечного клетчатого листа бумаги красятся в k цветов (каждая клетка красится целиком в один цвет). При каком наибольшем k в каждом клетчатом прямоугольнике со сторонами 3 и 4 встретятся клетки всех этих цветов?

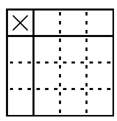
Ответ: 10.

Решение. Разобьем бесконечный клетчатый лист бумаги на десятиклеточные фигурки вида  так, как показано на рисунке.



Требуемая раскраска в 10 цветов получится, если раскрасить одну такую фигуру в 10 цветов, а остальные раскрасить ровно таким же способом.

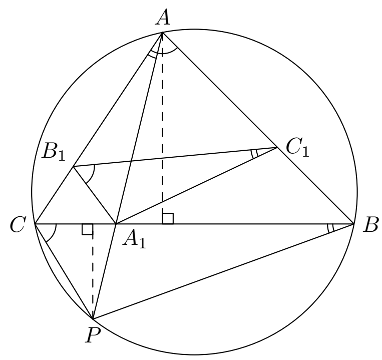
Очевидно, что более чем в 12 цветов требуемым образом покрасить лист нельзя. Пусть есть раскраска в 11 или 12 цветов. Предположим, что нашлась такая раскраска в 11 цветов, что в каждом квадрате 3×3 все цвета различны. Рассмотрим один такой квадрат. В содержащем его прямоугольнике 3×4 имеется лишь 11 различных цветов. Поэтому в дополнительной полоске 3×1 какие-то два цвета совпадают. Тогда в квадрате 3×3, содержащем эту полоску, какие-то два цвета совпадают.



Пусть у нас есть раскраска в n цветов, где n равно 11 или 12. Выберем квадрат 3×3, в котором не более $n-3$ разных цветов. Достроим его до прямоугольников 3×4 и 4×4 так, как показано на рисунке. Тогда в полосках 3×1 и 1×3 представлены одинаковые тройки цветов. Накроем горизонтальным прямоугольником 3×4 клетку, помеченную крестиком. Тогда этот прямоугольник будет содержать 5 клеток из полосок, значит, в нем имеется не менее двух пар клеток одного цвета, поэтому общее количество цветов не превосходит 10. Противоречие.

5. Дан треугольник ABC. На его сторонах BC, CA и AB соответственно выбраны такие точки A_1, B_1 и C_1, что четырехугольник $AB_1A_1C_1$ является вписанным. Докажите, что

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} \leqslant \left(\frac{B_1C_1}{AA_1}\right)^2.$$



Решение. Продлим отрезок AA_1 до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC и обозначим точку пересечения через P. Из вписанности четырехугольников $AB_1A_1C_1$ и $ABPC$ имеем равенства углов:

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1AC_1 = \angle PAB = \angle PCB \quad \text{и}$$
$$\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1AB_1 = \angle PAC = \angle PBC.$$

Следовательно, треугольники $A_1B_1C_1$ и PCB подобны по двум углам. Тогда

$$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle PCB}} = \frac{B_1C_1^2}{BC^2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{S_{\triangle PCB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{PA_1}{AA_1},$$

поскольку основания у них общие, а отношение высот равно отношению отрезков AA_1 и PA_1. Таким образом,

$$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle PCB}} \cdot \frac{S_{\triangle PCB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{B_1C_1^2}{BC^2} \cdot \frac{PA_1}{AA_1} \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{B_1C_1^2}{AA_1^2}.$$

Последнее неравенство после сокращений и домножения на знаменатели приводится к виду $4 \cdot PA_1 \cdot AA_1 \leqslant BC^2$. Но из подобия треугольников AA_1C и BA_1P следует, что $PA_1 \cdot AA_1 = BA_1 \cdot CA_1$. Поэтому

$$4 \cdot PA_1A \cdot A_1 = 4 \cdot BA_1 \cdot CA_1 \leqslant (BA_1 + CA_1)^2 = BC^2.$$

6. При некотором натуральном n число $n^5 + n^4 + 1$ имеет ровно шесть различных натуральных делителей. Докажите, что число $n^3 - n + 1$ является квадратом натурального числа.

Решение. Очевидно, что при $n = 1$ и $n = 2$ число $n^5 + n^4 + 1$ не имеет ровно шести различных натуральных делителей. Поэтому $n \geqslant 3$. Ровно шесть делителей могут иметь лишь числа вида p^5 или p^2q, p и q — различные простые числа. Заметим, что $n^5+n^4+1 = (n^3-n+1)(n^2+n+1)$. Пусть d — наибольший общий делитель чисел n^3-n+1 и n^2+n+1. Тогда число $n-2 = (n-1)(n^2+n+1)-(n^3-n+1)$ также делится на d. Следовательно, на d будет делиться и число $7 = (n^2 + n + 1) - (n + 3)(n - 2)$. Стало быть, $d = 1$ или $d = 7$. В первом случае получаем, что один из множителей равен p^2, а другой q. Но число n^2+n+1 не может быть точным квадратом, поскольку $n^2 < n^2+n+1 < n^2+2n+1 = (n+1)^2$. Значит, квадратом будет число n^3-n+1, что и нужно доказать. В случае $d = 7$ число n^5+n^4+1 делится на 7^2, поэтому оно имеет вид 7^2q или 7^5. В случае 7^2q множители равны 7 и $7q$, где $q \neq 7$ — простое число, а в случае 7^5 множители равны 7 и 7^4, поскольку их наибольший общий делитель равен 7. Таким образом, в любом случае один из множителей n^2+n+1 и n^3-n+1 равен 7, что невозможно при $n \geqslant 3$.

Вариант 2

1. Можно ли все натуральные числа от 1 до 2018 так расставить по кругу, что все суммы по 8 стоящих подряд чисел давали различные остатки от деления на 2018?

Ответ: нет.

Решение. Допустим, что так расставить числа удалось. Просуммируем все 2018 групп из 8 стоящих подряд чисел. С одной стороны, остаток от деления этой суммы на 2018 будет равен остатку суммы всех возможных остатков от деления на 2018, т. е. будет нечётным числом. С другой стороны, каждое число на окружности будет посчитано ровно 8 раз, поэтому этот остаток будет чётным. Противоречие.

2. Найдите все такие квадратные трехчлены $ax^2 + bx + c$ с вещественными коэффициентами a, b и c, что если в трехчлене заменить любой из трех коэффициентов на 1, то получившийся квадратный трехчлен будет иметь ровно один корень.

Ответ: $\frac{1}{2} \cdot x^2 \pm \sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2}$.

Решение. По условию трехчлены x^2+bx+c, ax^2+x+c и ax^2+bx+1 имеют ровно по одному корню. Следовательно, у них нулевые дискриминанты. Таким образом,

$$b^2 - 4c = 1 - 4ac = b^2 - 4a = 0.$$

Из того, что первое и третье выражение равны нулю, следует, что $a = c > 0$. Тогда из равенства нулю второго выражения получим, что $a = c = \frac{1}{2}$. Стало быть, $b = \pm\sqrt{2}$.

3. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $a^3+b^3+c^3 = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Решение. Поскольку $\frac{a^4}{a^4+3} + \frac{3}{a^4+3} = 1$,

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} = \frac{1}{3}\left(3 - \frac{a^4}{a^4+3} - \frac{b^4}{b^4+3} - \frac{c^4}{c^4+3}\right).$$

Следовательно, достаточно доказать, что выражение в скобках не меньше, чем $\frac{9}{4}$. Это равносильно неравенству

$$\frac{a^4}{a^4+3} + \frac{b^4}{b^4+3} + \frac{c^4}{c^4+3} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Докажем, что $\frac{a^4}{a^4+3} \leqslant \frac{a^3}{4}$. Действительно, это равносильно неравенству $4a \leqslant a^4 + 3$, которое уже совсем простое:

$$a^4 + 3 = (a^4 + 1) + 2 \geqslant 2\sqrt{a^4} + 2 = 2(a^2 + 1) \geqslant 4a.$$

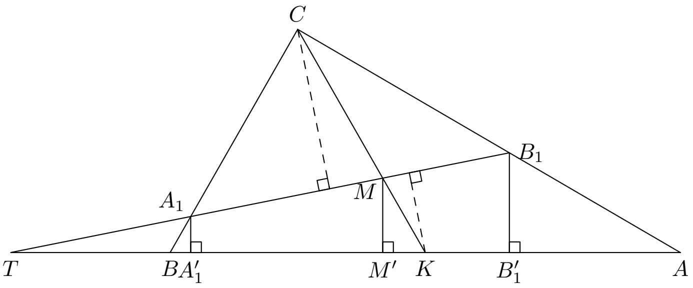
4. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить в таблице 50×50 так, чтобы в каждой вертикальной или горизонтальной полоске 1×6 была хотя бы одна отмеченная клетка.

Ответ: 416.

Решение. Квадрат 50×50 легко разрезать на четыре прямоугольника 24×26 и центральный квадрат 2×2. Каждый прямоугольник разрезается на $4 \cdot 26 = 104$ полоски 1×6. В каждой такой полоске должна быть своя отмеченная клетка, поэтому таких клеток будет не менее 416.

Покажем, как нужным образом отметить 416 клеток. Отметим все параллельные друг другу диагонали с длинами 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41 и 47. Всего будет отмечено $2 \cdot (5 + 11 + 17 + 23 + 29 + 35 + 41 + 47) = 416$ клеток.

5. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Проходящая через M прямая пересекает отрезки BC и CA в точках A_1 и B_1 соответственно. Точка K — середина стороны AB. Докажите, что $9S_{KA_1B_1} \geqslant 2S_{ABC}$.



Решение. Пусть прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке T, и пусть для определенности это произошло за точкой B. Поскольку точка пересечения медиан M делит медиану CK в отношении $2 : 1$, высоты, опущенные из точек C и K на прямую A_1B_1, также относятся как $2 : 1$. Тогда $2S_{\triangle KA_1B_1} = S_{\triangle CA_1B_1}$ и $S_{KA_1CB_1} = S_{\triangle KA_1B_1} + S_{\triangle CA_1B_1} = 3S_{\triangle KA_1B_1}$. Поэтому нужно доказать неравенство $3S_{KA_1CB_1} \geqslant 2S_{\triangle ABC}$. После сокращения общей площади останется неравенство $3(S_{\triangle AA_1K} + S_{\triangle BB_1K}) \leqslant S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle MAB}$ или, что тоже самое, неравенство $S_{\triangle AA_1K} + S_{\triangle BB_1K} \leqslant 2S_{\triangle MAB}$. Если увеличить основания треугольников AA_1K и BB_1K в два раза до отрезка AB, то площадь также увеличится в два раза, поэтому требуемое неравенство примет вид $S_{\triangle AA_1B} + S_{\triangle BB_1A} \leqslant 2S_{\triangle MAB}$. Поскольку это треугольники с одинаковым основанием, достаточно проверить соответствующее неравенство для высот. Пусть высоты, опущенные на прямую AB из точек A_1, B_1 и M, имеют основание A_1', B_1' и M' соответственно. Осталось доказать, что $A_1A_1' + B_1B_1' \leqslant 2MM'$. Это неравенство из-за подобия треугольников TA_1A_1', TB_1B_1' и TMM' можно переписать в виде $TA_1 + TB_1 \leqslant 2TM$, что верно, поскольку $MB_1 \leqslant MA_1$ (иначе точка пересечения AB и A_1B_1 будет лежать за точкой A).

6. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + m^5 = 5000?$$

Ответ: ни одного.

Решение. Пусть для некоторых натуральных чисел m и n выполняется равенство $n(n+1)(n+2)(n+3)+m^5 = 5000$. Поскольку $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n+1)^2-1$, равенство можно переписать в виде $k^2+m^5=5001$, где $k=n^2+3n+1$. Рассмотрим остатки от деления на 11 у левой и правой частей равенства $k^2+m^5=5001$. Квадраты могут давать остатки лишь 0, 1, 3, 4, 5 и 9, а пятые степени лишь остатки 0, 1 и 10. Но никакие из двух написанных остатков в сумме не дают остаток 6, который будет у числа 5001.

Вариант 3

1. Можно ли все натуральные числа от 1 до 2017 так расставить по кругу, чтобы любые два соседних числа отличались ровно на 17 или на 21?

Ответ: нет.

Решение. Поскольку соседние числа отличаются на нечётное число, они имеют разную чётность. Поэтому чётности чисел по кругу должны чередоваться. Но это невозможно, так как нечётных чисел больше, чем чётных.

2. Даны различные вещественные числа a, b и c. Квадратный трехчлен $f(x)$ удовлетворяет соотношениям $f(a) = bc$, $f(b) = ca$ и $f(c) = ab$. Найдите $f(a+b+c)$.

Ответ: $ab + bc + ca$.

Решение. Пусть $f(x) = px^2 + qx + r$. Тогда из равенств

$$bc = f(a) = pa^2 + qa + r \quad \text{и} \quad ca = f(b) = pb^2 + qb + r$$

следует, что $c(b-a) = p(a^2 - b^2) + q(a-b)$, откуда $c = -p(a+b) - q$, поскольку $a \neq b$. Аналогично получаем соотношение $b = -p(a+c) - q$. Вычтем первое равенство из второго:

$$b - c = p\big(a + b) - (a + c)\big) = p(b - c).$$

Следовательно, $p = 1$. Тогда $q = -(a+b+c)$ и $r = f(a) - pa^2 - qa = ab + bc + ca$. Стало быть,

$$\begin{aligned} f(a+b+c) &= p(a+b+c)^2 + q(a+b+c) + r = \\ &= (a+b+c)^2 - (a+b+c)^2 + (ab+bc+ca) = ab + bc + ca. \end{aligned}$$

3. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{a^4+b^4}{a^6+b^6} + \frac{b^4+c^4}{b^6+c^6} + \frac{c^4+a^4}{c^6+a^6} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

Решение. Заметим, что $\frac{a^4+b^4}{a^6+b^6} \leqslant \frac{1}{ab}$. Действительно, это неравенство после домножения на знаменатель примет вид $a^6 + b^6 - a^5b - ab^5 \geqslant 0$, что эквивалентно неравенству $(a^5 - b^5)(a - b) \geqslant 0$. В таком виде оно очевидно, поскольку скобки в левой части одного знака.

Следовательно,

$$\frac{a^4+b^4}{a^6+b^6} + \frac{b^4+c^4}{b^6+c^6} + \frac{c^4+a^4}{c^6+a^6} \leqslant \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{abc}.$$

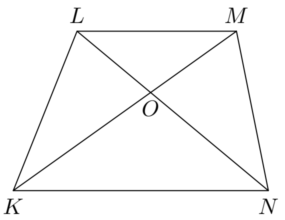
4. На клетчатой доске 50×50 Петя расставляет 50 не бьющих друг друга ладей, а Вася выбирает на доске по клеточкам квадрат $k \times k$ ($k \leqslant 50$). При каких k вне зависимости от действий Пети Вася всегда сможет выбрать квадрат, в котором не будет ни одной ладьи?

Ответ: При $k \leqslant 7$.

Решение. Покажем, как Васе выбрать квадрат 7×7. Заметим, что хотя бы в одном углу доски 50×50 не стоит ладья. Пусть для определенности это правый верхний угол. Тогда в самой верхней строке и в самом правом столбце стоит по ладье. Разобьем остальную часть доски на квадраты 7×7 начиная с левого нижнего угла. Получится 7^2 квадратов, в которых стоит не более чем $7^2 - 1$ ладья. Поэтому какой-то квадрат пустой, и его сможет выбрать Вася.

Покажем, как расставить 50 ладей так, чтобы не было даже пустого квадрата 8×8. Занумеруем строки и столбцы доски 50×50 числами от 0 до 49. Поставим ладьи в клетки с координатами $(8x + y, x + 8y)$ при всех таких целых неотрицательных x и y, при которых они помещаются на доску. Тогда легко видеть, что при любом расположении квадрата 8×8 в нем окажется хотя бы одна ладья. Отметим, что заведомо $0 \leqslant x \leqslant 6$ и $0 \leqslant y \leqslant 6$. Покажем, что среди них нет ладей, стоящих в одном ряду. Действительно, если две ладьи оказались на одной вертикали, то $8x + y = 8x' + y'$, откуда $y' - y$ делится на 8 и, значит, $y = y'$, а тогда и $x = x'$. Аналогично проверяется, что две ладьи не окажутся на одной горизонтали. Поскольку $0 \leqslant x, y \leqslant 6$ поставлено не более 49 ладей. Последовательно доставим недостающее количество ладей на свободные горизонтали и вертикали и получим нужную расстановку.

5. Дана трапеция $ABCD$. На основаниях BC и AD соответственно выбраны точки Q и S. Отрезки AQ и BS пересекаются в точке P, а отрезки CS и DQ пересекаются в точке R. Докажите, что $S_{PQRS} \leqslant \frac{1}{4}S_{ABCD}$.



Первое решение. Сначала докажем следующую лемму:

Пусть трапеция разбита диагоналями на 4 треугольника. Тогда площадь треугольника, имеющего в качестве стороны боковую сторону трапеции, не превосходит четверти площади трапеции.

Доказательство. Пусть диагонали трапеции $KLMN$ пересекаются в точке O, а ее основания — отрезки KL и MN. Тогда

$$\frac{S_{\triangle KOL}}{S_{\triangle KLM}} = \frac{OK}{OK + OM} = \frac{KL}{KL + NM} \quad \text{и} \quad \frac{S_{\triangle KLM}}{S_{\triangle KNM}} = \frac{KL}{NM}.$$

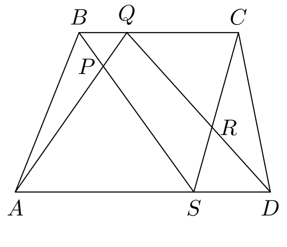
Следовательно,

$$S_{\triangle KOL} = \frac{KL}{KL + NM} \cdot S_{\triangle KLM} = \frac{KL \cdot NM}{(KL + NM)^2} \cdot S_{KLMN} \leqslant \frac{S_{KLMN}}{4}.$$

Лемма доказана.

По лемме $S_{\triangle PQS} \leqslant \frac{1}{4}S_{ABQS}$ и $S_{\triangle QRS} \leqslant \frac{1}{4}S_{CDSQ}$. Тогда

$$S_{PQRS} = S_{\triangle SPQ} + S_{\triangle SRQ} \leqslant \frac{1}{4}(S_{ABQS} + S_{CDSQ}) = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$



Второе решение. Площади треугольников ABS и AQS равны, поскольку у них общее основание и равные высоты. Следовательно,

$$S_{\triangle ABP} + S_{\triangle APS} = S_{\triangle ABS} = S_{\triangle AQS} = S_{\triangle PQS} + S_{\triangle APS}.$$

Стало быть, $S_{\triangle PQS} = S_{\triangle ABP}$ (обозначим их общее значение через s_1). Аналогично, $S_{\triangle PRS} = S_{\triangle CDR}$ (обозначим их общее значение через s_2). С другой стороны,

$$\begin{aligned} s_1^2 = S_{\triangle ABP}S_{\triangle PQS} = \frac{1}{2}AP \cdot PB \sin\angle APB \cdot \frac{1}{2}QP \cdot PS \sin\angle APB = \\ = \frac{1}{2}AP \cdot PS \sin\angle APS \cdot \frac{1}{2}BP \cdot PQ \sin\angle APS = S_{\triangle APS}S_{\triangle BPQ}. \end{aligned}$$

Следовательно, $S_{\triangle APS} + S_{\triangle BPQ} \geqslant 2\sqrt{S_{\triangle APS}S_{\triangle BPQ}} = 2s_1$. Аналогично получаем, что $S_{\triangle DRS} + S_{\triangle CRQ} \geqslant 2s_2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} S_{ABCD} = \big(2s_1 + S_{\triangle APS} + S_{\triangle BPQ}\big) + \big(2s_2 + S_{\triangle DRS} + S_{\triangle CRQ}\big) \geqslant \\ \geqslant 4s_1 + 4s_2 = 4S_{PQRS}. \end{aligned}$$

6. Найдите все такие натуральные числа a и b, что для всех натуральных n число $(an+1)^6 + b$ делится на n^2+n+1.

Ответ: $a = 2$, $b = 27$.

Решение. Заметим, что $n^3 - 1$ делится на n^2+n+1. Следовательно, число n^3 дает остаток 1 от деления на n^2+n+1. Будем считать остаток от деления числа $(an+1)^6 + b$ на n^2+n+1. Для этого раскроем скобки:

$$(an+1)^6 + b = a^6n^6 + 6a^5n^5 + 15a^4n^4 + 20a^3n^3 + 15a^2n^2 + 6an + 1 + b.$$

Остаток будет равен остатку числа

$$\begin{aligned} & a^6 + 6a^5n^2 + 15a^4n + 20a^3 + 15a^2n^2 + 6an + 1 + b = \\ & \quad = (6a^5 + 15a^2)n^2 + (15a^4 + 6a)n + (a^6 + 20a^3 + 1 + b) = \\ & \quad = An^2 + Bn + C. \end{aligned}$$

Если число $An^2 + Bn + C$ делится на число n^2+n+1, то на него делится и число $(B-A)n + (C-A) = (An^2+Bn+C) - A(n^2+n+1)$. Но при больших n число n^2+n+1 больше, чем $|(B-A)n + (C-A)|$, и делимость возможна лишь в случае, когда $A = B = C$. Равенство $A = B$ означает, что $6a^5 + 15a^2 = 15a^4 + 6a$, откуда либо $a = 1$, либо $5a = 2(a^2+1)$, т. е. $a = 2$. В первом случае равенство $B = C$ невозможно, во втором случае условие $B = C$ равносильно $b = 27$.

Вариант 4

1. Можно ли все натуральные числа от 1 до 2018 так расставить по кругу, чтобы сумма любых четырёх подряд стоящих чисел была нечётным числом?

Ответ: нет.

Решение. В каждой сумме четырёх подряд стоящих чисел одно или три нечётных слагаемых. Во всех суммах ровно по одному чётному (нечётному) слагаемому быть не может. Действительно, весь круг покрывается 505 четвёрками, а всего он содержит 1009 чётных чисел. Значит, хотя бы в одной четвёрке нечётных чисел не меньше двух, то есть три. Значит, есть четвёрка с одним чётным числом и четвёрка с тремя нечётными числами. Рассмотрим такую четвёрку и пойдём от неё по часовой стрелке. Следующая четвёрка получается выбрасыванием одного числа из предыдущей и добавлением одного нового числа. Заметим, что добавленное и выброшенное числа должны быть одной чётности, иначе изменится чётность суммы чисел в четвёрке. Поэтому в следующей четвёрке также ровно три нечётных числа. Рассуждая таким образом, мы получим, что во всех четверках ровно три нечётных числа. Противоречие.

2. Найдите все такие квадратные трехчлены ax^2+bx+c с вещественными коэффициентами a, b и c, что если в трехчлене увеличить любой из трех коэффициентов на 1, то получившийся квадратный трехчлен будет иметь ровно один корень.

Ответ: $\frac{1}{8}\cdot x^2-\frac{3}{4}\cdot x+\frac{1}{8}$.

Решение. По условию трехчлены $(a+1)x^2+bx+c$, $ax^2+(b+1)x+c$ и $ax^2+bx+(c+1)$ имеют ровно по одному корню. Следовательно, у них нулевые дискриминанты. Таким образом,

$$b^2-4(a+1)c=(b+1)^2-4ac=b^2-4a(c+1)=0.$$

Из того, что первое и третье выражение равны нулю, следует, что $a=c$. Тогда из равенства нулю второго выражения получим, что $b+1=\pm 2a$. После исключения b и c из последнего равенства получится уравнение $0=(-1\pm 2a)^2-4a(a+1)=1\mp 4a-4a$. Значит, знак $\mp$ является минусом. Тогда $c=a=\frac{1}{8}$ и $b=-1+2\cdot\frac{1}{8}=-\frac{3}{4}$.

3. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{a+5}+\frac{b}{b+5}+\frac{c}{c+5}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Решение. Заметим, что $\frac{a}{a+5}=1-\frac{5}{a+5}$, поэтому

$$\frac{a}{a+5}+\frac{b}{b+5}+\frac{c}{c+5}=3-\left(\frac{5}{a+5}+\frac{5}{b+5}+\frac{5}{c+5}\right).$$

Следовательно, достаточно доказать, что выражение в скобках не меньше $\frac{5}{2}$. Это равносильно неравенству

$$\frac{1}{a+5}+\frac{1}{b+5}+\frac{1}{c+5}\geqslant\frac{1}{2}$$

или, что тоже самое, неравенству

$$\big((a+5)+(b+5)+(c+5)\big)\left(\frac{1}{a+5}+\frac{1}{b+5}+\frac{1}{c+5}\right)\geqslant\frac{a+b+c+15}{2}. \qquad (*)$$

Но левая часть после раскрытия скобок имеет вид

$$3+\left(\frac{b+5}{a+5}+\frac{a+5}{b+5}\right)+\left(\frac{c+5}{a+5}+\frac{a+5}{c+5}\right)+\left(\frac{c+5}{a+5}+\frac{c+5}{b+5}\right),$$

где каждая скобка не меньше двух, поскольку является суммой взаимо обратных чисел. Таким образом, достаточно доказать, что $9 \geqslant \frac{a+b+c+15}{2}$, то есть $a+b+c \leqslant 3$. Но это неравенство справедливо, поскольку $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)=9$.

Замечание. Неравенство $(*)$ можно объяснить и другими способами. Например, по неравенству о средних

$$(a+5)+(b+5)+(c+5) \geqslant 3\sqrt[3]{(a+5)(b+5)(c+5)} \quad \text{и}$$

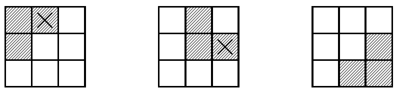
$$\frac{1}{a+5}+\frac{1}{b+5}+\frac{1}{c+5} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{a+5}\cdot\frac{1}{b+5}\cdot\frac{1}{c+5}}=\frac{3}{\sqrt[3]{(a+5)(b+5)(c+5)}},$$

поэтому левая часть не меньше 9. Правая часть не больше 9, поскольку $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)=9$.

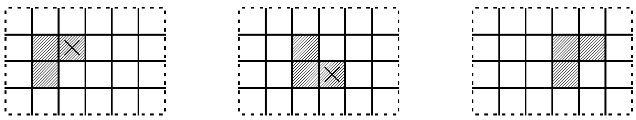
4. Дана клетчатая доска $m \times n$ $(m, n \geqslant 2)$. *Уголком* называется трёхклеточная фигура, состоящая из клетки (назовём её центральной) и двух соседних с ней по стороне клеток (их мы назовем боковыми). Картонный уголок накрывает левый верхний угол и две соседние с ним клетки доски. За одну операцию можно выбрать одну из боковых клеток уголка и повернуть уголок на 90° относительно центра этой клетки, при этом после поворота уголок должен полностью оставаться на доске. При каких m и n с помощью таких операций можно переместить уголок так, что его центральная клетка будет накрывать правый нижний угол доски?

Ответ: при нечётных m и n.

Решение. Покажем как добиться нужного перемещения при нечётных m и n. При $m=n=3$ так сделать можно (на рисунке крестиком отмечена клетка, относительно которой происходит поворот).

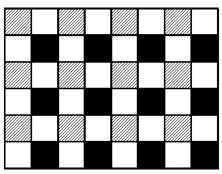


На следующем рисунке показано, как переместить уголок с сохранением его ориентации на две клетки вправо. Проделаем это действие $\frac{m-3}{2}$ раза. Аналогичным действием можно сместить уголок на две клетки вниз



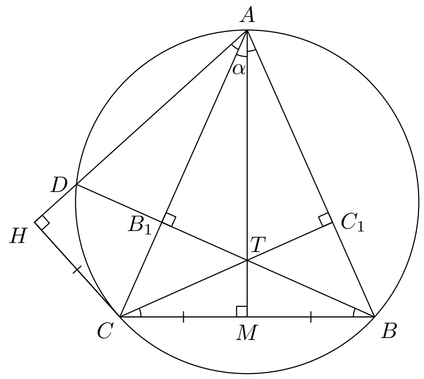
с сохранением его ориентации. Проделаем это действие $\frac{n-3}{2}$ раза. А затем переместим уголок так, как мы это делали для $m=n=3$, и он займет нужную нам позицию.

Пусть теперь одна из сторон доски чётная. Покажем, что выполнить требуемое перемещение не удастся. Предположим, что оно существует. Рассмотрим шахматную раскраску доски, но клетки, у которых обе координаты нечётные, покрасим в серый цвет.



Заметим, что при любом повороте уголка центральная клетка будет располагаться на серой или чёрной клетке доски, а боковые клетки — на белых. Кроме того, при любом повороте цвет, на котором находится центральная клетка, меняется на противоположный (т. е. с серого на чёрный, а с чёрного — на серый). Поскольку в конце уголок нужно повернуть на 180°, в общей сложности будет сделано чётное число поворотов. Следовательно, в конце перемещения центральная клетка снова окажется на серой клетке доски. Поэтому обе её координаты имеют ту же чётность, что и начальная клетка доски. Значит, они нечётны, т. е. m и n нечётны.

5. Окружность ω описана вокруг равнобедренного треугольника ABC. Продолжение высоты BB_1, опущенной на боковую сторону AC, пересекает окружность ω в точке D. Из точки C опущены перпендикуляры CC_1 на боковую сторону AB и CH на прямую AD. Докажите, что $S_{BCB_1C_1} \geqslant S_{HCC_1}$.



Решение. Пусть M — середина основания BC, а T — точка пересечения высот треугольника ABC. Из равнобедренности треугольника ABC отрезок AM является биссектрисой и высотой. Положим $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда

$$\angle CAD = \angle CBD = \angle CBB_1 = 90^\circ - \angle BCA = \alpha.$$

Прямоугольные треугольники AMC и AHC равны, поскольку они имеют общую сторону и равные углы $\angle CAM = \alpha = \angle CAH$. В частности, $CH = CM$, и точки M и H симметричны относительно прямой AC. Точки D и T также симметричны относительно прямой AC, поскольку прямоугольные треугольники AB_1D и AB_1T равны. Тогда треугольники DCH и TCM симметричны относительно прямой AC. Поэтому $\angle DCH = \angle TCM$ и

$$\angle HCC_1 = \angle DCB = 180^\circ - \angle DAB = 180^\circ - 3\alpha.$$

С другой стороны, четырехугольник CB_1DH вписанный (у него два противоположных угла прямые), откуда $\angle CHB_1 = \angle CDB_1 = \angle BAC = 2\alpha$. Наконец, четырехугольник BCB_1C_1 также вписанный (так как $\angle BB_1C = \angle CC_1B = 90^\circ$), поэтому $\angle CC_1B = \angle CBB_1 = \alpha$. Стало быть, в четырехугольнике CC_1B_1H сумма трех углов

$$\angle CC_1B + \angle CHB_1 + \angle HCC_1 = \alpha + 2\alpha + (180^\circ - 3\alpha) = 180^\circ.$$

Следовательно, точка B_1 лежит на отрезке HC_1. Поэтому требуемое неравенство можно записать в виде

$$S_{\triangle CC_1B_1} + S_{\triangle CC_1B} = S_{BCB_1C_1} \geqslant S_{\triangle HCC_1} = S_{\triangle HCC_1B_1} = S_{\triangle CC_1B_1} + S_{\triangle CHB_1}.$$

Значит, осталось понять, что $S_{\triangle CC_1B} \geqslant S_{\triangle CHB_1}$. Но треугольники CHB_1 и CMB_1 симметричны относительно прямой AC, поэтому их площади равны, и надо лишь показать, что $S_{\triangle CC_1B} \geqslant S_{\triangle CMB_1}$. Это уже очевидно, поскольку у этих треугольников одинаковые высоты, а основания отличаются в два раза.

6. Найдите все пары натуральных чисел m и n, таких что $m+1$ делится на n и n^2-n+1 делится на m.

Ответ: $(m,n)=(1,1)$, $(1,2)$ и $(3,2)$.

Решение. Если $n=1$, то $m=1$, и такая пара, очевидно, подходит. Будем считать, что $n \geqslant 2$. Пусть $m+1=kn$. Числа m и n взаимно просты, поскольку, если d их общий делитель, то $1=(m+1)-m=kn-m$ делится на d. Кроме того, $m \leqslant n^2-n+1 \leqslant n^2-1$, поэтому $kn=m+1 \leqslant n^2$ и $k \leqslant n$. Заметим, что

$$n(n+k-1)=n^2-n+kn=(n^2-n+1)+(kn-1)$$

делится на m. Тогда на m делится число $n+k-1$. Следовательно, $m \leqslant n+k-1 \leqslant 2n-1$. Стало быть, $m+1$ не превосходит $2n$ и делится на n. Поэтому $m+1=n$ или $m+1=2n$. В первом случае $n^2-n+1=(m+1)^2-(m+1)+1=m^2+m+1$, и из делимости n^2-n+1 на m вытекает, что $m=1$ и $n=2$. Эта пара нам подходит. Во втором случае $m \geqslant 3$ и $n^2-n+1=\left(\frac{m+1}{2}\right)^2-\left(\frac{m+1}{2}\right)+1=\frac{m^2+3}{4}$. Из делимости n^2-n+1 на m мы получаем, что m^2+3 также делится на m и, значит, $m=3$ и $n=2$. Эта пара нам тоже подходит.