Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2017/2018 учебный год

Задания для 6–9 классов

1. (10 баллов) *В мастерской имеются бусины двух форм — «кубики» и «пирамидки». «Кубики» зеленого и синего цветов, а «пирамидки» — красного и синего цветов. Традиции требуют, чтобы в любых украшениях рядом располагающиеся бусины были разных форм и разных цветов. Ювелир сделал ожерелье в форме кольца, использовав все четыре типа бусин и в соответствии с традициями. Сколько бусин может быть в таком ожерелье?*

а) 7; б) 8; в) 10; г) 11.

Ответ: б) и в).

Решение: Докажем, что решением задачи являются числа вида $6 + 2k$, где k — целое неотрицательное число. Договоримся обозначать зеленые и синие кубики как К и К, а красные и синие пирамидки — как П и П.

Прежде всего заметим, что количество бусинок четно. Действительно, кубики и пирамидки не могут стоять рядом. Поэтому они представлены в ожерелье поровну и, значит, общее число бусинок равно удвоенному количеству кубиков.

Покажем, что минимальное число бусинок равно 6. По условию в ожерелье обязательно должен быть синий кубик К. Слева и справа от него могут стоять только красные пирамидки, то есть ожерелье содержит комбинацию П К П. Также по условию должны быть задействованы зеленый кубик К и синяя пирамидка П. Таким образом, в ожерелье должно быть не менее 5 бусинок, а с учетом четности — не менее 6. Комбинация П К П К П К дает пример традиционного ожерелья из 6 бусинок.

Осталось заметить, что между П и К можно вставлять пару этих же бусинок любое количество раз. Поэтому числа вида $6 + 2k$ при неотрицательном целом k являются решениями задачи.

2. (10 баллов) *Известно, что одна из четырех монет фальшивая и отличается от настоящих весом. Требуется определить, какая из монет является фальшивой, с помощью весов без гирь. Какие из перечисленных утверждений являются верными?*

а) Фальшивую монету можно определить за 2 взвешивания.

б) Фальшивую монету можно определить за 3 взвешивания.

в) Фальшивую монету можно определить за 4 взвешивания.

г) Среди перечисленных ответов нет верного.

Ответ: а)

Решение: Выберем из имеющихся монет две и взвесим их (одну на одной чашке весов, другую — на другой). Таким образом мы определим, в какой паре находится фальшивая монета (если весы оказались в равновесии, то фальшивая находится среди оставшихся двух монет, иначе — среди выбранных).

Теперь возьмем одну монету из той пары, где обе монеты настоящие, и одну монету из той пары, где есть фальшивая, и взвесим их, запомнив, на какую чашку весов положили настоящую монету. Если весы оказались в равновесии, то есть мы взвесили две настоящих монеты, то фальшивой является оставшаяся монета в той паре, в которой были одна настоящая и одна фальшивая. Если же весы показали разный вес, то фальшивой является вторая монета на весах.

3. (20 баллов) *Во время жеребьевки перед математическим марафоном капитанам команд было предложено назвать наименьшую возможную сумму цифр в десятичной записи числа $n+1$, если известно, что сумма цифр числа n равна 2017. Какой ответ дал капитан команды, победившей в жеребьевке?*

Ответ: 2.

Решение: Покажем вначале, что ответ не меньше 2. Если сумма цифр числа $n+1$ равна 1, то $n+1 = 10\ldots0$, а десятичная запись n состоит из одних девяток. Тогда число n кратно 9 и сумма его цифр, значит, тоже. Но это невозможно, поскольку 2017 не делится на 9.

Осталось привести пример числа $n+1$, сумма цифр которого равна 2. Поскольку $2017 = 224 \cdot 9 + 1$, мы можем положить $n = 19\ldots9$, где девятка повторяется 224 раза. Действительно, в этом случае $n+1 = 20\ldots0$.

4. (20 баллов) *Перед уроком учительница математики выписала на доске девять последовательных чисел, но дежурные одно из них случайно стерли. Когда начался урок, выяснилось, что сумма оставшихся восьми чисел равна 1703. Какое число стерли дежурные?*

Ответ: 214.

Решение: Обозначим среднее исходных чисел через a. Тогда эти числа можно записать в симметричной форме:

$$a-4, a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2, a+3, a+4.$$

Стертое число имеет вид $a+b$, где $-4 \leqslant b \leqslant 4$, а сумма остальных чисел равна $9a - (a+b) = 8a - b$. С другой стороны, эта же сумма равна $1703 = 8 \cdot 213 - 1$. Поэтому

$$8 \cdot 213 - 1 = 8a - b, \quad \text{откуда} \quad 8(a-213) = b-1.$$

Тогда число $b-1$ кратно 8 и лежит в промежутке $[-5, 3]$. Значит, $b = 1$, $a = 213$, а дежурные стерли число $213 + 1 = 214$.

5. (20 баллов) *Алексей придумал следующую игру. Сначала он выбирает число x такое, что* $2017 \leqslant x \leqslant 2117$. *Затем он проверяет, делится ли x на 3, 5, 7, 9 и 11 без остатка. Если x делится на 3, то Алексей присуждает числу 3 очка, если на 5 — то 5 очков, …, если на 11 — то 11 очков. Набранные очки для числа суммируются. Какое число следует выбрать в такой игре, чтобы набрать наибольшее количество очков?*

Ответ: $2079 = 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 3$.

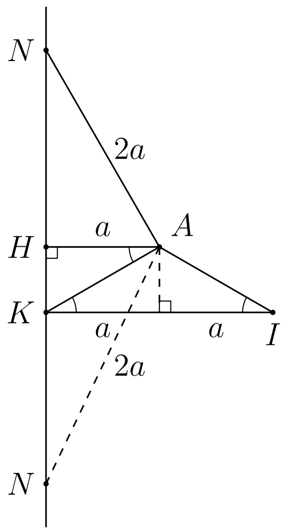
Решение: Заметим, что делимость x на 9 дает сразу 12 баллов, поскольку влечет и делимость на 3. Если число x не кратно 11, оно получит не более $9+7+5+3=24$ балла, а если не кратно 9 — не более $11+7+5+3=26$ баллов. Если число делится одновременно на 11 и 9, то оно кратно 99. В заданном диапазоне единственным таким числом будет 2079. Поскольку 2079 делится еще и на 7, оно дает $11+9+7+3=30$ баллов.

Осталось заметить, что более 30 баллов получить нельзя. Действительно, такой результат может дать только число, которое делится на 3, 5, 7, 9 и 11 одновременно. Наименьшим таким числом является $11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 = 3465$, но оно больше 2117.

6. (30 баллов) *В треугольнике KIA углы K и I равны* 30°. *На прямой, проходящей через точку K перпендикулярно стороне KI, отмечена точка N так, что AN равно KI. Найдите величину угла KAN.*

Ответ: 90° или 30°.

Решение: Пусть $KI = 2a$, а точка H — основание перпендикуляра из вершины A на



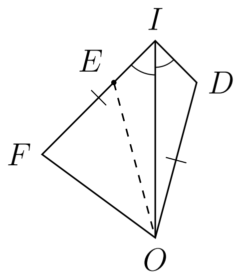
прямую KN. Согласно условию, $\triangle KIA$ — равнобедренный с основанием KI, следовательно, A лежит на серединном перпендикуляре к KI, откуда имеем, что $AH = a$.

Легко заметить, что $\triangle AHN$ — прямоугольный, в котором катет AH в два раза меньше гипотенузы AN. Следовательно, $\angle HAN = 60^\circ$. А поскольку $AH \| KI$, то $\angle KAH =$

$= \angle AKI$. Отсюда получаем, что, поскольку точка N может быть расположена по разные стороны от прямой KI, то либо $\angle KAN = \angle HAN + \angle HAK = 60^\circ + 30^\circ$, либо $\angle KAN = \angle HAN - \angle HAK = 60^\circ - 30^\circ$.

7. (30 баллов) *В выпуклом четырехугольнике $FIDO$ противоположные стороны FI и DO равны между собой и больше стороны DI. Известно, что $\angle FIO = \angle DIO$. Докажите, что FO больше DI.*

Решение:



Отметим на отрезке FI такую точку E, что $IE = ID$ (это можно сделать, поскольку $FI > DI$). Треугольники IDO и IEO равны по двум сторонам и углу (IO — их общая сторона, $IE = ID$, $\angle FIO = \angle DIO$). Поэтому $EO = DO = FI$. По неравенству треугольника для $\triangle FOE$ имеем $FO + FE > EO$. Тогда

$$FO > EO - FE = FI - FE = EI = ID,$$

что и требовалось доказать.

8. (40 баллов) *Шаман племени Солнцелюбов каждую полночь высчитывает, будет ли грядущий день счастливым: в соответствии с верованиями племени, день с номером D от начала времен будет счастливым, если число*

$$\left(D^2+4\right)\left(R^2+4\right) - 2D\left(R^2+4\right) - 2R\left(D^2+4\right)$$

неотрицательно, где R – номер дня, когда родился вождь племени. Бывают ли у Солнцелюбов дни, не являющиеся счастливыми?

Ответ: Нет, не бывают.

Решение: Легко заметить, что вопрос задачи эквивалентен следующему: "Существуют ли такие натуральные $D \geqslant R$, что значение указанного в условии выражения отрицательно?". Преобразуем уменьшаемое:

$$\left(D^2+4\right)\left(R^2+4\right) = \frac{2}{2}\cdot\left(D^2+4\right)\left(R^2+4\right) = \frac{\left(D^2+4\right)}{2}\left(R^2+4\right) + \left(D^2+4\right)\frac{\left(R^2+4\right)}{2}.$$

Поскольку $a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 \geqslant 0$ для любого натурального a, то $\frac{D^2+4}{2} \geqslant 2D$ и $\frac{R^2+4}{2} \geqslant 2R$. Отсюда получаем, что исходное выражение всегда неотрицательно.

9. (40 баллов) *Даны следующие числа: 20172017, 20172018, 20172019, 20172020 и 20172021. Есть ли среди них число, взаимно простое со всеми остальными? Если есть, то какое?*

Ответ: 20172017, 20172019.

Решение: Заданные числа являются пятью последовательными натуральными числами. Четные числа 20172018 и 20172020 не подходят.

Соседние числа всегда взаимно простые:

$$n = mq, \quad n + 1 = mp, \quad 1 = m(p - q) \;\Rightarrow\; m = 1.$$

Соседние нечетные числа тоже всегда взаимно простые:

$$2k + 1 = mq, \quad 2k + 3 = mp, \quad 2 = m(p - q), \quad m \neq 2 \;\Rightarrow\; m = 1.$$

Значит, число 20172019 гарантированно является взаимно простым с остальными.

Осталось проверить числа 20172017 и 20172021. Число 20172021, как и число 20172018, делится на 3, следовательно, оно не подходит. А вот $20172017 = 2017 \cdot 137 \cdot 7$ тоже взаимно простое с остальными.