Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2017/2018 учебный год.

Задания для 6-7 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2017/2018 учебный год. 6 – 7 классы.

Вариант 1

1. *Докажите, что для любого натурального n существуют такие целые числа x и y, что $x^2 + y^2 - 2017$ делится на n.*

Решение. В качестве x и y можно взять числа 44 и 9. Они годятся для всех n, поскольку $44^2 + 9^2 - 2017 = 0$. □

2. *Костя «объединил» таблицу сложения и таблицу умножения натуральных чисел: он построил таблицу, у которой строки и столбцы соответствуют натуральным числам, и заполнил все клетки: в клетку на пересечении r-й строки и s-го столбца он поместил число $rs + (s + r)$.*

	1	2	3	...
1	1	2	3	...
2	2	4	6	...
...	...			

Таблица умножения

$+$

	1	2	3	...
1	2	3	4	...
2	3	4	5	...
...	...			

Таблица сложения

$=$

	1	2	3	...
1	3	5	7	...
2	5	8	11	...
...	...			

Костина таблица

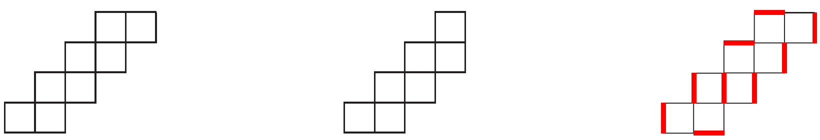
Посмотрев внимательно, Костя обнаружил, что некоторое натуральное число n в таблице отсутствует (оно присутствует только в подписях к n-й строке и n-му столбцу, а в клетках самой таблицы его не оказалось). Докажите, что тогда число $n + 1$ — простое.

Решение. Если число $n + 1$ не простое, то его можно разложить в произведение двух множителей, бо́льших 1. Запишем их в виде $r+1$ и $s+1$, где r и s — натуральные числа. Тогда

$$n = n + 1 - 1 = (r + 1)(s + 1) - 1 = rs + s + r,$$

то есть число n содержится в таблице. □

3. *Будем называть лесенкой фигуру, состоящую из клеточек, расположенных в виде ступенек (см. на рисунке пример лесенок из 7 и 8 клеток). На рисунке, изображающем лесенку, нарисуем разметку: обведем красным цветом несколько непересекающихся сторон клеток так, чтобы каждая вершина каждой клетки принадлежала ровно одному красному отрезку. Сколько различных разметок имеется у лесенки из 199 клеток?*



Лесенка из 8 клеток Лесенка из 7 клеток Разметка

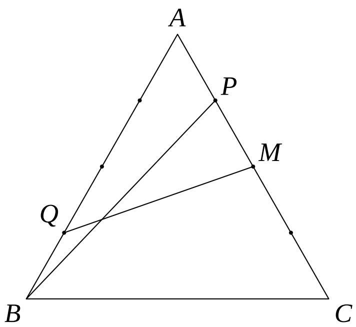
Ответ: 200.

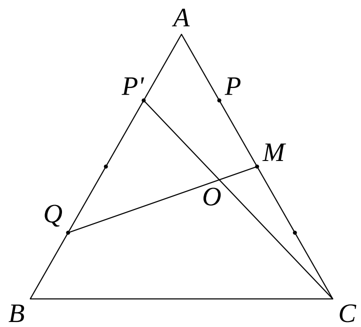
Решение. Обозначим через L_n количество разметок лесенки из n клеток. Пусть точка A — левый нижний угол левой нижней клетки лесенки.

Если красный отрезок, содержащий точку A, вертикальный, то удалим из лесенки левую нижнюю клетку. Оставшаяся фигура представляет собой перевернутую лесенку из $n-1$ клетки. Добавляя к любой из L_{n-1} разметок этой лесенки красный отрезок, содержащий A, мы получаем разметку исходной лесенки. Таким образом, имеется ровно L_{n-1} разметок исходной лесенки, в которых отрезок, содержащий точку A, вертикален. Если же красный отрезок, содержащий точку A, горизонтальный, то, как нетрудно видеть, разметка всей лесенки в этом случае достраивается однозначно.

Таким образом, справедливо соотношение $L_n = L_{n-1} + 1$. Учитывая очевидное краевое условие $L_1 = 2$, мы сразу находим, что $L_n = n + 1$. $\square$

4. *Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Точка M — середина стороны AC, точка P — середина AM, на стороне AB отмечена точка Q так, что $AQ = 3BQ$. Докажите, что $BP + MQ > AC$.*





Решение 1. По неравенству треугольника

$$MQ + MA > AQ \iff MQ + \tfrac{1}{2}AC > \tfrac{3}{4}AB \iff MQ > \tfrac{1}{4}AC = PA.$$

Тогда

$$BP + MQ > BP + PA > AB = AC. \quad \square$$

Решение 2. Пусть точка P' симметрична P относительно оси симметрии треугольника. Очевидно, $BP = CP'$. Обозначим через O точку пересечения отрезков CP' и MQ. Дважды применяя неравенство треугольника, мы получим

$$CP' + MQ = (CO + OM) + (QO + OP') > CM + QP' = \tfrac{1}{2}AC + \tfrac{1}{2}AB = AC. \quad \square$$

5. *Беговая дорожка представляет собой окружность длиной 1 км. Вдоль дуги, длина которой равна 100 м, построены зрительские трибуны. Можно ли запустить по этой дорожке в одном и том же направлении 10 бегунов, движущихся с постоянными скоростями — 20, 21, …, 29 км/ч — так, чтобы в любой момент времени напротив трибун пробегал хотя бы один из бегунов?*

(Место старта каждого бегуна можно назначить в любом месте, независимо от остальных бегунов.)

Ответ: нет.

Решение. Пусть Δ — интервал дорожки, идущий вдоль трибун (без концевых точек). Рассмотрим промежуток времени, за который каждый из бегунов пробежит целое число кругов (например, 29! часов). Поскольку трибунная дуга составляет $\frac{1}{10}$ длины дорожки, каждый бегун ровно $\frac{1}{10}$ всего этого времени будет находиться возле трибун. Поскольку бегунов ровно 10, требование задачи обеспечивается лишь тогда, когда «трибунные интервалы» бегунов не налегают друг на друга. Иными словами, в промежутке Δ в любой момент времени может быть лишь один бегун. Покажем, что это не так. Пусть A и B — спортсмены, бегущие со скоростями 20 и 21 км/ч соответственно. Допустим, B догнал A в какой-то точке дорожки вне Δ. До начала трибун им надо пробежать не более 900 метров, и бегун A преодолеет это расстояние максимум за 0,045 часа. Когда A добежит до начала трибун, B будет опережать его не более чем на 45 метров. После этого A и B будут некоторое время находиться в Δ вместе. $\square$

6. *На доске написано 10 000 нечетных чисел, не делящихся на 5. Докажите, что можно выбрать несколько чисел так, что их сумма будет оканчиваться на 1379. (Если выбирается одно число, то оно и равно сумме.)*

Решение. Проверим вначале два утверждения.

1) *Если число m взаимно просто с 10 000, а числа p и q дают разные остатки при делении на 10 000, то числа pm и qm также дают разные остатки.* Действительно, $pm-qm = (p-q)m$. Первый множитель не делится на 10 000, а второй взаимно прост с 10 000.

2) *Если число a взаимно просто с 10 000, то существует такое число a', взаимно простое с 10 000, что $aa' \mod 10\,000 = 1$.* Действительно, в силу 1) остатки от деления на 10 000 чисел $a, 2a, \ldots, 9999a$ такие же, как у чисел $1, 2, \ldots, 9999$, поэтому среди них есть 1. Если a' и 10 000 имеют общий делитель, то он будет также делителем единицы и потому равен 1.

Докажем по индукции, что если у нас имеется $n \leqslant 10\,000$ чисел, взаимно простых с 10 000, то всевозможные суммы, составленные из этих чисел, дают не менее n различных остатков по модулю 10 000. База $n = 1$ тривиальна. Пусть мы умеем составлять из $n-1$ числа суммы $S_1, \ldots, S_{n-1}$ с различными остатками $b_1, \ldots, b_{n-1}$ (занумеруем остатки по возрастанию). Добавим новое число a. Мы можем считать, что $a = 1$. Действительно, пусть для $a = 1$ все доказано. В общем случае подберем a' в соответствии с 2) и домножим все числа на a'. Суммы этих чисел также домножатся на a', и в силу 1) количество различных остатков от деления сумм на 10 000 не изменится. При этом число a заменится на $aa' \pmod{10\,000} = 1$, и по предположению различных остатков будет не менее n.

Пусть $a = 1$. Если $b_1, \ldots, b_{n-1}$ возрастают с шагом 1, то сумма $S_{n-1} + a$ дает новый остаток $b_{n-1} + 1 \pmod{10\,000}$. В противном случае найдется такое $k < n-1$, что $b_{k+1} - b_k \geqslant 2$. Тогда сумма $S_k + a$ дает новый остаток $b_k + 1$. $\square$

Вариант 2

1. *Докажите, что для любого натурального n существуют такие целые числа x и y, что $x^2 + y^2 - 2018$ делится на n.*

Решение. В качестве x и y можно взять числа 43 и 13. Они годятся для всех n, поскольку $43^2 + 13^2 - 2018 = 0$. $\square$

2. *Костя «объединил» таблицу сложения и таблицу умножения натуральных чисел: он построил таблицу, у которой строки и столбцы соответствуют натуральным числам, начиная с 3, и заполнил все клетки: в клетку на пересечении r-й строки и s-го столбца он поместил число $rs - (s + r)$.*

	3	4	5	…
3	9	12	15	…
4	12	16	20	…
…	…			

Таблица умножения

$-$

	3	4	5	…
3	6	7	8	…
4	7	8	9	…
…	…			

Таблица сложения

$=$

	3	4	5	…
3	3	5	7	…
4	5	8	11	…
…	…			

Костина таблица

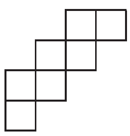
Посмотрев внимательно, Костя обнаружил, что некоторое натуральное число $n > 3$ в его таблице отсутствует (оно присутствует только в подписях к n-й строке и n-му столбцу, а в клетках самой таблицы его не оказалось). Докажите, что тогда число $n + 1$ — простое.

Решение. Если число $n + 1$ не простое, то его можно разложить в произведение двух множителей, бо́льших 1. Запишем их в виде $r - 1$ и $s - 1$, где r и s — натуральные числа, $r, s \geqslant 3$. Тогда

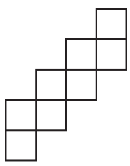
$$n = n + 1 - 1 = (r - 1)(s - 1) - 1 = rs - s - r,$$

то есть число n содержится в таблице. $\square$

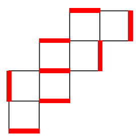
3. *Будем называть лесенкой фигуру, состоящую из клеточек, расположенных в виде ступенек (см. на рисунке пример лесенок из 7 и 8 клеток). На рисунке, изображающем лесенку, нарисуем разметку: обведем красным цветом несколько непересекающихся сторон клеток так, чтобы каждая вершина каждой клетки принадлежала ровно одному красному отрезку. Сколько различных разметок имеется у лесенки из 200 клеток?*



Лесенка из 7 клеток



Лесенка из 8 клеток



Разметка

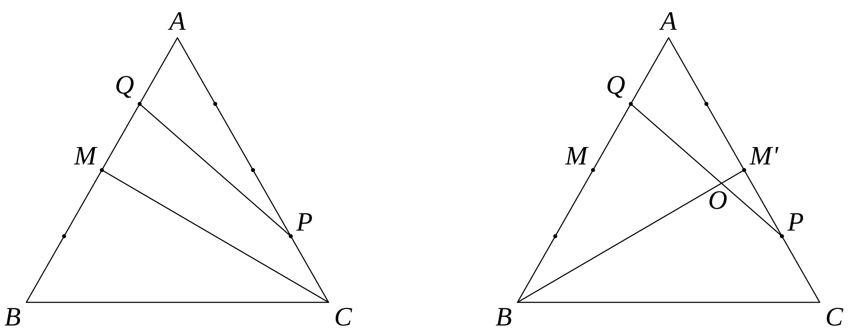
Ответ: 201.

Решение. Обозначим через L_n количество разметок лесенки из n клеток. Пусть точка A — левый нижний угол левой нижней клетки лесенки.

Если красный отрезок, содержащий точку A, горизонтальный, то удалим из лесенки левую нижнюю клетку. Оставшаяся фигура представляет собой перевернутую лесенку из $n-1$ клетки. Добавляя к любой из L_{n-1} разметок этой лесенки красный отрезок, содержащий A, мы получаем разметку исходной лесенки. Таким образом, имеется ровно L_{n-1} разметок исходной лесенки, в которых отрезок, содержащий точку A, горизонтален. Если же красный отрезок, содержащий точку A, вертикальный, то, как нетрудно видеть, разметка всей лесенки в этом случае достраивается однозначно.

Таким образом, справедливо соотношение $L_n = L_{n-1} + 1$. Учитывая очевидное краевое условие $L_1 = 2$, мы сразу находим, что $L_n = n + 1$. $\square$

4. *Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Точка M — середина стороны AB, точка Q — середина AM, на стороне AC отмечена точка P так, что $AP = 3PC$. Докажите, что $PQ + CM > AB$.*



Решение 1. По неравенству треугольника

$$PQ + QA > AP \iff PQ + \tfrac{1}{4}AB > \tfrac{3}{4}AC \iff PQ > \tfrac{1}{2}AB = MA.$$

Тогда

$$PQ + CM > CM + MA > AC = AB. \quad \square$$

Решение 2. Пусть точка M' симметрична M относительно оси симметрии треугольника. Очевидно, $CM = BM'$. Обозначим через O точку пересечения отрезков BM' и PQ. Дважды применяя неравенство треугольника, мы получим

$$BM' + QP = (BO + OQ) + (PO + OM') > BQ + PM' = \tfrac{3}{4}AB + \tfrac{1}{4}AC = AB. \quad \square$$

5. *Беговая дорожка представляет собой окружность длиной 2 км. Вдоль дуги, длина которой равна 100 м, построены зрительские трибуны. Можно ли запустить по этой дорожке в одном и том же направлении 20 бегунов, движущихся с постоянными скоростями — 10, 11, …, 29 км/ч — так, чтобы в любой момент времени напротив трибун пробегал хотя бы один из бегунов? (Место старта каждого бегуна можно назначить в любом месте, независимо от остальных бегунов.)*

Ответ: нет.

Решение. Пусть Δ — интервал дорожки, идущий вдоль трибун (без концевых точек). Рассмотрим промежуток времени, за который каждый из бегунов пробежит целое число кругов (например, 29! часов). Поскольку трибунная дуга составляет $\frac{1}{20}$ длины дорожки, каждый бегун ровно $\frac{1}{20}$ всего этого времени будет находиться возле трибун. Поскольку бегунов ровно 20, требование задачи обеспечивается лишь тогда, когда «трибунные интервалы» бегунов не налегают друг на друга. Иными словами, в промежутке Δ в любой момент времени может быть лишь один бегун. Покажем, что это не так. Пусть A и B — спортсмены, бегущие со скоростями 20 и 21 км/ч соответственно. Допустим, B догнал A в какой-то точке дорожки вне Δ. До начала трибун им надо пробежать не более 1900 метров, и бегун A преодолеет это расстояние максимум за 0,095 часа. Когда A добежит до начала трибун, B будет опережать его не более чем на 95 метров. После этого A и B будут некоторое время находиться в Δ вместе. $\square$

6. *На доске написано 1000 нечетных чисел, не делящихся на 5. Докажите, что можно выбрать несколько чисел, так что их сумма будет оканчиваться на 713. (Если выбирается одно число, то оно и равно сумме.)*

Решение. Проверим вначале два утверждения.

1) *Если число m взаимно просто с 10 000, а числа p и q дают разные остатки при делении на 10 000, то числа pm и qm также дают разные остатки.* Действительно, $pm - qm = (p-q)m$. Первый множитель не делится на 10 000, а второй взаимно прост с 10 000.

2) *Если число a взаимно просто с 10 000, то существует такое число a', взаимно простое с 10 000, что $aa' \mod 10\,000 = 1$.* Действительно, в силу 1) остатки от деления на 10 000 чисел $a, 2a, \ldots, 9999a$ такие же, как у чисел $1, 2, \ldots, 9999$, поэтому среди них есть 1. Если a' и 10 000 имеют общий делитель, то он будет также делителем единицы и потому равен 1.

Докажем по индукции, что если у нас имеется $n \leqslant 10\,000$ чисел, взаимно простых с 10 000, то всевозможные суммы, составленные из этих чисел, дают не менее n различных остатков по модулю 10 000. База $n = 1$ тривиальна. Пусть мы умеем составлять из $n-1$ числа суммы $S_1, \ldots, S_{n-1}$ с различными остатками $b_1, \ldots, b_{n-1}$ (занумеруем остатки по возрастанию). Добавим новое число a. Мы можем считать, что $a = 1$. Действительно, пусть для $a = 1$ все доказано. В общем случае подберем a' в соответствии с 2) и домножим все числа на a'. Суммы этих чисел также домножатся на a', и в силу 1) количество различных остатков от деления сумм на 10 000 не изменится. При этом число a заменится на $aa' \pmod{10\,000} = 1$, и по предположению различных остатков будет не менее n.

Пусть $a = 1$. Если $b_1, \ldots, b_{n-1}$ возрастают с шагом 1, то сумма $S_{n-1} + a$ дает новый остаток $b_{n-1} + 1 \pmod{10\,000}$. В противном случае найдется такое $k < n-1$, что $b_{k+1} - b_k \geqslant 2$. Тогда сумма $S_k + a$ дает новый остаток $b_k + 1$. $\square$