Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2016/2017 учебный год.

Задания для 8-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Вариант 1

1. На острове живут два племени: племя рыцарей, которые всегда говорят правду, и племя лжецов, которые всегда лгут. На главный праздник за большим круглым столом разместились 2017 островитян. Каждый житель острова произнес фразу: «мои соседи из одного племени». Оказалось, что двое лжецов ошиблись и случайно сказали правду. Сколько лжецов может сидеть за этим столом?

Ответ: 1344 лжеца

Решение. Заметим, что никакие два рыцаря не могут сидеть рядом, то есть соседи каждого рыцаря — лжецы. Действительно, рассмотрим цепочку сидящих подряд рыцарей, окруженных лжецами. Предположим, что в этой цепочке хотя бы два рыцаря. Соседи крайнего рыцаря — рыцарь и лжец, но это невозможно, поскольку тогда рыцарь солгал. Следовательно, никакие два рыцаря не сидят рядом и соседи каждого рыцаря лжецы.

Назовем тех лжецов, которые не ошиблись, *настоящими лжецами*. По условию соседи каждого настоящего лжеца из разных племен. Поэтому соседи настоящих лжецов обязательно рыцарь и лжец. Значит цепочка ЛРЛЛРЛ…ЛРЛ повторяется до тех пор, пока не натыкается на ненастоящего лжеца. Если до него сидит рыцарь, то после него также рыцарь. Если до него сидит лжец, то и после него сидит лжец. Следовательно, рассадка с ненастоящими лжецами может быть получена из рассадки «ЛРЛ-ЛРЛ…ЛРЛ» с помощью либо посадки ненастоящего лжеца между двумя лжецами, либо выходу из-за стола настоящего лжеца (и тогда его сосед-лжец превратится в ненастоящего). Первое действие увеличивает остаток от деления общего количества сидящих за столом на 1, второе — уменьшает на 1. Поскольку в рассадке «ЛРЛЛРЛ…ЛРЛ» количество островитян делится на 3, а 2017 дает остаток 1 при делении на 3, нам надо остаток 0 дважды уменьшить на 1. Таким образом, надо из рассадки 2019 островитян убрать двоих лжецов. Стало быть, количество лжецов равно $2019 \cdot \frac{2}{3} - 2 = 1344$.

2. Докажите, что для любых положительных чисел $x < y$ справедливо неравенство $x + \sqrt{y^2+2} < y + \sqrt{x^2+2}$.

Решение. Запишем неравенство в виде

$$y - x > \sqrt{y^2+2} - \sqrt{x^2+2} = \frac{(y^2+2)-(x^2+2)}{\sqrt{y^2+2}+\sqrt{x^2+2}} = \frac{(y-x)(y+x)}{\sqrt{y^2+2}+\sqrt{x^2+2}}.$$

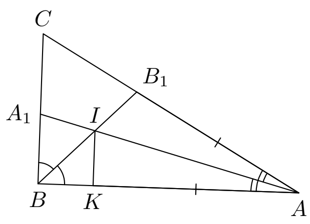
Домножим на знаменатели и сократим на $y - x$, останется проверить неравенство $x + y < \sqrt{y^2+2} + \sqrt{x^2+2}$, которое очевидно, поскольку $\sqrt{x^2+2} > \sqrt{x^2} = x$ и $\sqrt{y^2+2} > \sqrt{y^2} = y$.

3. В треугольнике ABC с углом $\angle C = 60^\circ$ проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Докажите, что $AB_1 + BA_1 = AB$.

Первое решение. Обозначим через I точку пересечения биссектрис в треугольнике. Пусть $\alpha = \angle BAA_1$ и $\beta = \angle ABB_1$. Тогда $2\alpha+2\beta+60^\circ = 180^\circ$.

Следовательно, $\beta = 60^\circ - \alpha$. Тогда

$$\angle AA_1C = \angle ABC + \angle A_1AB = 2(60^\circ - \alpha) + \alpha = 120^\circ - \alpha$$
$$= 180^\circ - (60^\circ + \alpha) = 180^\circ - (\angle ABB_1 + \angle BAC) = \angle BB_1A.$$



Отметим на стороне AB такую точку K, что $AK = AB_1$. Треугольники AB_1I и AKI равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $\angle AKI = \angle AB_1I = \angle AA_1C$. Следовательно, треугольники BKI и BA_1I равны по двум углам и стороне. Стало быть, $BA_1 = BK$ и, значит, $AB = AK + BK = AB_1 + BA_1$.

Второе решение. Пусть $\alpha = \angle BAA_1$ и $\beta = \angle ABB_1$. Тогда $2\alpha + 2\beta + 60^\circ = 180^\circ$. Следовательно, $\beta = 60^\circ - \alpha$ и

$$\angle AA_1B = 180^\circ - \angle ABC - \angle A_1AB =$$
$$= 180^\circ - \alpha - 2\beta = 180^\circ - 2(60^\circ - \alpha) - \alpha = 60^\circ + \alpha.$$

Аналогично $\angle BB_1A = 60^\circ + \beta = 120^\circ - \alpha$. По теореме синусов для треугольников BAA_1 и ABB_1 имеем:

$$BA_1 = AB\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(60^\circ + \alpha)} \quad \text{и} \quad AB_1 = AB\cdot\frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin(120^\circ - \alpha)} = AB\cdot\frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin(60^\circ + \alpha)}.$$

Стало быть,

$$AB_1 + BA_1 = AB\cdot\frac{\sin\alpha + \sin(60^\circ - \alpha)}{\sin(60^\circ + \alpha)} =$$
$$= AB\cdot\frac{2\sin 30^\circ\cos(30^\circ - \alpha)}{\sin(60^\circ + \alpha)} = AB\cdot\frac{\sin(60^\circ + \alpha)}{\sin(60^\circ + \alpha)} = AB.$$

4. Даны целые числа a и b, не равные -1. Квадратный трехчлен $x^2 + abx + (a+b)$ имеет два целых корня. Докажите, что $a + b \leqslant 6$.

Решение. Будем считать, что $a + b > 0$, в противном случае все уже доказано. Поскольку у трехчлена целые корни, его дискриминант $(ab)^2 - 4(a+b)$ является точным квадратом, т. е. $(ab)^2 - 4(a+b) = k^2$ для некоторого неотрицательного целого k. Тогда числа ab и k имеют одинаковую четность. Из соотношения $0 < 4(a+b) = (ab)^2 - k^2 = (|ab| - k)(|ab| + k)$ получаем, что $|ab| - k > 0$ и четно, поэтому $|ab| \geqslant k + 2$. Следовательно, $4(a+b) \geqslant (ab)^2 - (|ab| - 2)^2 = 4|ab| - 4$, и, значит, $|ab| - a - b + 1 \leqslant 2$. Если $a,\ b \geqslant 0$, то $(a-1)(b-1) \leqslant 2$. В случае когда обе скобки положительны, одно из чисел a и b равно 2, а второе не больше 3, поэтому их сумма не превосходит 6. Если одна скобка равна нулю (пусть для определенности $a = 1$), то $k^2 = b^2 - 4(b+1) = (b-2)^2 - 8$. Это возможно лишь в случае $b - 2 = 3$, поскольку числа $b - 2$ и k одной четности, а $(m+2)^2 - m^2 = 4m + 4 > 8$ при $m > 1$. Таким образом, $a + b = 6$. Если одна из скобок отрицательна (пусть для определенности первая), то $a \leqslant 0$ и $b > 0$. Следовательно, $2 \geqslant |ab| - a - b + 1 = -ab - a - b + 1$ и, значит, $(a+1)(b+1) \geqslant 0$, что невозможно (при $a = 0$ это очевидно, а если $a < 0$, то $a < -1$ и первый множитель отрицателен, а второй положителен).

5. В каждой клетке доски 2017×2017 лежит фишка. За одну операцию можно снять с доски фишку, у которой ненулевое четное число соседей (соседними считаются фишки, расположенные в клетках, примыкающих друг к другу по стороне или углу). Какое наименьшее количество фишек можно оставить на доске с помощью таких операций?

Ответ: 2

Решение. Если на доске стоят всего две фишки, то у каждой из них не более одного соседа, и по условию их снять нельзя. Поэтому останется не менее двух фишек. Покажем, как оставить на доске ровно две фишки. Для этого приведем алгоритм, который позволяет очистить от фишек две соседние строки (или два соседних столбца) на доске $m \times n$. Пусть для определенности мы ходим очистить верхние две строки. Занумеруем клетки числами от 1 до n. Сначала снимем фишку с 2-й клетки второй строки (это можно сделать, ибо у нее 8 соседей), далее снимем угловую фишку (у нее теперь 2 соседа), затем 3-ю фишку с первой строки (у нее 4 соседа), далее 2-ю фишку первой строки (у нее 2 соседа) и 1-ю фишку второй строки (у нее также 2 соседа). Далее последовательно двигаясь слева направо будем снимать с доски все фишки первой строки (у каждой из них в момент снятия будет 4 соседа, кроме крайней, у которой будет 2 соседа), а затем аналогично снимать фишки второй строки. Так мы очистим две крайних строки. Применим последовательно эти действия поочередно для строк и столбцов до тех пор пока не останутся лишь фишки в квадрате 3×3. С ними разобраться совсем легко: снимаем центральную, затем в любом порядке 4 угловых, затем оставшуюся верхнюю и, наконец, оставшуюся нижнюю.

6. Назовем делитель d натурального числа $n > 1$ *хорошим*, если $d+1$ также является делителем n. Найдите все натуральные n, у которых не менее половины делителей являются хорошими.

Ответ: 2, 6, 12

Решение. Рассмотрим такое n. Если d — хороший делитель n, то $d+1$ также делитель n. Но числа d и $d+1$ взаимно просты, поэтому n делится на $d(d+1)$ и, в частности, $n \geqslant d(d+1) > d^2$. Стало быть, $d < \sqrt{n}$. Таким образом, все хорошие делители меньше, чем $\sqrt{n}$. Для любого делителя d число n/d также будет делителем числа n, причем не более чем одно из чисел в этой паре меньше $\sqrt{n}$, поэтому не более чем один из этих делителей будет хорошим. Но хороших делителей у n не менее половины, значит, все делители, меньшие $\sqrt{n}$, должны быть хорошими. Число 1 является делителем n и $1 < \sqrt{n}$, следовательно, оно хорошее и 2 также является делителем n. Продолжая рассуждение, далее получим, что все числа от 1 до $k = [\sqrt{n}]$ являются делителями n. Заметим, что $n = 2$ подходит. Если же n имеет хотя бы три делителя, то n делится на k, $k-1$ и $k-2$, а, значит, и на $\frac{1}{2}k(k-1)(k-2)$. Тогда $\frac{1}{2}k(k-1)(k-2) \leqslant n < (k+1)^2$, что после приведения подобных принимает вид $4k^2 + 1 > k^3$ и, значит, $k \leqslant 4$. Осталось проверить числа $n = \text{НОК}(2,3) = 6$ и $n = \text{НОК}(2,3,4) = 12$. Оба они подходят.

Вариант 2

1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. В комнате собралось 15 островитян. Каждый из находящихся в комнате произнес две фразы: «Среди моих знакомых в этой комнате ровно шесть лжецов» и «среди моих знакомых в этой комнате не более семи рыцарей». Сколько рыцарей может быть в этой комнате?

Ответ: 9 рыцарей

Решение. Если в комнате есть лжец, то его фраза «среди моих знакомых в этой комнате не более семи рыцарей» — ложь и в комнате не менее 8 рыцарей. Если в комнате есть рыцарь, то его фраза «среди моих знакомых в этой комнате ровно шесть лжецов» верна и в комнате не менее 6 лжецов. Следовательно, в комнате есть и рыцари и лжецы, причем рыцарей не менее 8, а лжецов не менее 6. Значит рыцарей не более $15-6=9$. Предположим, что рыцарей ровно 8. Тогда в комнате 7 лжецов и у каждого из них более 7 знакомых рыцарей. Поэтому каждый из них знаком со всеми находящимися в комнате рыцарями. Значит и каждый рыцарь знаком со всеми находящимися в комнате лжецами, т. е. у него 7 знакомых лжецов. Но тогда он сказал неправду. Поэтому 8 рыцарей быть не может. Стало быть, в комнате 9 рыцарей. Такая ситуация возможна, если каждый рыцарь знает каждого лжеца, а больше никто ни с кем не знаком.

2. Даны различные натуральные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 и a_7. Докажите, что $(a_1-a_2)^4+(a_2-a_3)^4+(a_3-a_4)^4+(a_4-a_5)^4+(a_5-a_6)^4+(a_6-a_7)^4+(a_7-a_1)^4 \geqslant 82$.

Решение. Заметим, что все слагаемые не меньше 1. Если одна из скобок хотя бы 3, то вся сумма заведомо больше $3^4+1=82$. Поэтому далее мы будем считать, что любая из скобок по модулю не превосходит 2. Отметим на прямой числа $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Пусть a_j — наименьшее из них, а a_k — наибольшее. Тогда $|a_i-a_{i+1}|$ — длина отрезка, соединяющего точки a_i и a_{i+1}. Пусть для определенности $k>j$. Тогда $|a_k-a_j| \leqslant |a_{j+1}-a_j|+\ldots+|a_k-a_{k-1}|$ и $|a_j-a_k| \leqslant |a_{k+1}-a_k|+\ldots+|a_7-a_6|+|a_1-a_7|+\ldots+|a_j-a_{j-1}|$. Сложив эти неравенства, мы получим неравенство

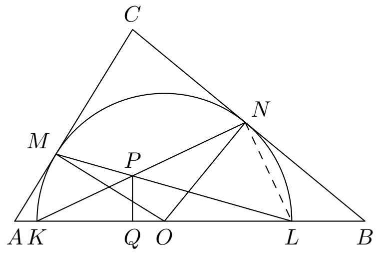
$$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_7-a_1| \ \geqslant\ 2(a_k-a_j)\ \geqslant\ 12.$$

Итак, сумма модулей не менее 12, значит, мы имеем либо не менее шести двоек, либо пять двоек и две единицы. Сумма четвёртых степеней разностей в обоих случаях не меньше 82.

3. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка O. Окружность ω с центром в точке O пересекает отрезки AO и OB в точках K и L соответственно и касается сторон AC и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что точка пересечения отрезков KN и LM лежит на высоте

AH треугольника ABC.

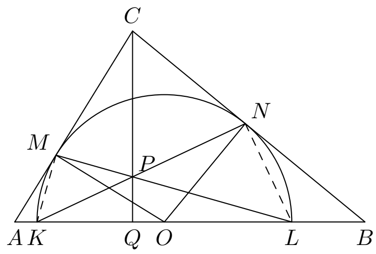
Первое решение. Пусть отрезки KN и LM пересекаются в точке P, а Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на AB. Можно считать, что точка Q лежит на отрезке OK. Прямоугольные треугольники OCN и OCM имеют равные катеты $OM = ON$ и общую гипотенузу OC, поэтому они равны и, в частности, $\angle COM = \angle CON$. Таким образом, $\angle CON = \frac{1}{2}\angle MON$. Заметим далее, что угол $\angle KNL$ опирается на диаметр KL и, значит, $\angle KNL = 90°$. Поскольку в четырехугольнике $QPNL$ противоположные углы $\angle PNL$ и $\angle PQL$ прямые, он является вписанным. Следовательно, $\angle PQN = \angle PLN$. Но угол $\angle PLN$ опирается на дугу MN, поэтому он равен половине этой дуги, т.е. половине угла $\angle MON$. Таким образом, $\angle PQN = \angle PLN = \frac{1}{2}\angle MON = \angle CON$. Из равенства углов



$$\angle OCN = 90° - \angle CON = 90° - \angle PQN = \angle OQN$$

следует, что четырехугольник $QONC$ вписанный. Тогда сумма его противоположных углов равна $180°$: $\angle CQO + \angle ONC = 180°$. Стало быть, $\angle CQO = 90°$ и прямая CQ перпендикулярна AB. Таким образом, точка Q совпадает с точкой H и P лежит на CH. А это и требовалось доказать.

Второе решение. Положим для краткости $\angle C = 2\gamma$. Пусть отрезки KN и LM пересекаются в точке P, а Q — точка пересечения прямых CP и AB. Поскольку CM и CN — отрезки касательных от точки C до точек касания, $CM = CN$ и, значит, треугольник CMN равнобедренный. Тогда $\angle CMN = 90° - \gamma$. Так как точки M и N — точки касания, $\angle CMO = \angle CNO = 90°$ и, значит, $\angle MON = 180° - 2\gamma$. Это центральный угол, опирающийся на дугу $\overset{\frown}{MN}$, значит, вписанный угол $\angle MKP$ равен его половине. Таким образом, $\angle MKP = 90° - \gamma = \angle CMN$. Поскольку KL — диаметр окружности, опирающийся на него угол равен $90°$, поэтому $\angle PMK = \angle LMK = 90°$. Следовательно, $\angle MPK = 90° - \angle MKP = \gamma$ и $\angle MPN = 180° - \gamma$. Рассмотрим теперь описанную окружность треугольника MPN и ее центр — точку X. Заметим, что $\angle MXN = \overset{\frown}{MPN} = 180 - \angle MPN = \gamma = \angle MCN$. Кроме того, точки C и X лежат на серединном перпендикуляре к отрезку MN. Следовательно, они совпадают, и C — центр описанной окружности треугольника MPN. Тогда $CM = CN = CP$. Поскольку CN — касательная к окружности, $\angle CNP = \frac{1}{2}\overset{\frown}{KMN} = \angle KLN$. С другой стороны, $\angle CPN = \angle CNP$ из равнобедренности треугольника NCP. Таким образом, $\angle CPN = \angle KLN$ и, значит, четырехугольник $PQLN$ вписанный. Но тогда $\angle PQL = 180° - \angle LNP = 90°$.



4. Дан квадратный трехчлен $p(x)$ с вещественными коэффициентами. Докажите, что существует такое натуральное число n, что уравнение

$p(x) = 1/n$ не имеет рациональных решений.

Решение. Пусть $p(x) = ax^2 + bx + c$. Предположим противное. Пусть для каждого натурального n существует такое рациональное число x_n, для которого $p(x_n) = \frac{1}{n}$. Ясно, что числа x_n различны. Покажем, что числа a, b и c рациональны. Поскольку

$$(x_k - x_n)\big(a(x_k + x_n) + b\big) = a(x_k^2 - x_n^2) + b(x_k - x_n) = p(x_k) - p(x_n) = \frac{1}{k} - \frac{1}{n},$$

$a(x_k + x_n) + b$ рационально при всех различных k и n. Тогда число $a(x_2 - x_3) = \big(a(x_1 + x_2) + b\big) - \big(a(x_1 + x_3) + b\big)$ также рационально и, значит, a рационально. Стало быть, рационально и число b. Но тогда $c = p(x_1) - ax_1^2 - bx_1$ также рационально.

Таким образом, можно считать, что трехчлен имеет вид $p(x) = \frac{a}{d}x^2 + \frac{b}{d}x + \frac{c}{d}$, где a, b и c — целые числа, а d — натуральное. Рассмотрим простое число q, большее и числа d, и числа $|a|$. Возьмем соответствующее ему рациональное число $x_q = \frac{r}{s}$, где дробь $\frac{r}{s}$ несократима. Тогда

$$\frac{1}{q} = p\Big(\frac{r}{s}\Big) = \frac{a}{d}\Big(\frac{r}{s}\Big)^2 + \frac{b}{d}\cdot\frac{r}{s} + \frac{c}{d} = \frac{1}{ds^2}\big(ar^2 + brs + cs^2\big).$$

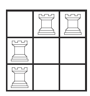
Следовательно, $q(ar^2 + brs + cs^2) = ds^2$. Поскольку, ds^2 делится на простое число q, а $d < q$, на число q должно делиться s^2, а, значит, и s. Пусть $s = qm$, тогда $ar^2 + brqm + cq^2m^2 = qdm^2$. Но это невозможно, поскольку правая часть делится на q, а левая часть не делится, так как a и r не делятся на q. Мы пришли к противоречию.

5. Какое наибольшее количество ладей можно расставить в клетках доски 300×300 так, чтобы каждая ладья била не более одной ладьи? (Ладья бьет все клетки, до которых может дойти по шахматным правилам, не проходя сквозь другие фигуры.)

Ответ: 400

Первое решение. Докажем, что на доске можно разместить не более 400 ладей. В каждой строке или столбце стоит не более двух ладей, иначе стоящая не с краю ладья бьет как минимум две другие ладьи. Пусть есть k столбцов, в которых стоит по две ладьи. Рассмотрим одну такую пару. Они бьют друг друга, поэтому в тех строках, в которых они расположены, ладей нет. Таким образом, ладьи могут находиться лишь в $300-2k$ строках. Поскольку в каждой из них ладей не более двух, всего ладей не более $2(300 - 2k) + 2k = 600 - 2k$. С другой стороны, в k столбцах стоит по две ладьи, а в остальных $300 - k$ не более одной, поэтому всего их не более $(300 - k) + 2k = 300 + k$. Следовательно, всего ладей не больше, чем $\frac{1}{3}\big((600 - 2k) + 2(300 + k)\big) = 400$.

Покажем далее как разместить 400 ладей. На доске 3×3 можно разместить 4 ладьи как показано на рисунке, а затем поставить 100 таких квадратов по диагонали.



Второе решение. На доске могут стоять ладьи, которые не бьют ни одну из остальных ладей, а также пары бьющих друг друга ладей. Пусть на доске k одиночных ладей и n пар бьющих друг друга ладей. Тогда всего на доске $k + 2n$ ладей. Будем считать общее количество занятых строк и столбцов (для удобства назовем их линиями). Каждая одиночная ладья занимает свою строку и свой столбец, т. е. две линии. Каждая пара ладей занимает три своих линии. Следовательно, всего занято $2k + 3n$ линий. Таким образом, $2k + 3n \leqslant 600$. Поэтому $k + 2n = \frac{2}{3}(2k + 3n) - \frac{k}{3} \leqslant \frac{2}{3}(2k + 3n) \leqslant \frac{2}{3} \cdot 600 = 400$.

Пример расстановки такой же как в первом решении.

6. Найдите все такие тройки различных простых чисел p, q, r и натуральное число k, что $pq-k$ делится на r, $qr-k$ делится на p, $rp-k$ делится на q и число $pq - k$ положительно.

Ответ: 2, 3, 5 и все перестановки, $k = 1$

Решение. Поскольку $pq - k$ делится на r, число $n = pq + qr + rp - k$ также делится на r. Отметим, что $n \geqslant pq - k > 0$. Аналогично число n делится на p и на q. Поскольку p, q и r — различные простые числа, они взаимно просты и, значит, n делится на pqr. Следовательно, $n \geqslant pqr$. Стало быть, $pq+qr+rp-k \geqslant pqr$ или, что тоже самое, $pqr\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1\right) = pq + qr + rp - pqr \geqslant k > 0$. Поэтому $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1 > 0$. Найдем все тройки различных простых чисел, сумма обратных величин которых больше 1. Пусть для определенности $p < q < r$. Если $p \neq 2$, то $p \geqslant 3$, $q \geqslant 3$ и $r \geqslant 3$, и такие числа заведомо не подходят. Стало быть, $p = 2$. Если $q \neq 3$, то $r \geqslant q \geqslant 5$ и такие числа также не подходят. Поэтому $q = 3$. Если $r \neq 5$, то $r \geqslant 7$ и эта тройка вновь не подходит. Таким образом, $p = 2$, $q = 3$ и $r = 5$. Тогда $n = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 2 - k = 31 - k$ и нужно подобрать такое k, для которого $31 - k$ делится на $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, значит, $k = 1$.

Вариант 3

1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. На празднике по случаю открытия нового футбольного сезона за круглым столом разместились 50 футбольных фанатов: 25 болельщиков команды “Суперорлы” и 25 болельщиков команды “Суперльвы”. Каждый из них заявил: «справа от меня фанат “Суперорлов”». Могло ли среди фанатов “Суперорлов” и фанатов “Суперльвов” быть поровну лжецов?

Ответ: нет

Решение. Пусть среди фанатов “Суперорлов” и среди фанатов “Суперльвов” по k лжецов. Тогда всего лжецов ровно $2k$, т. е. фраза «справа от меня фанат “Суперорлов”» четное число раз была ложью. Таким образом, четное число раз правым соседом был фанат “Суперльвов”. Но такое невозможно, поскольку всего их нечетное число.

2. Для любых чисел x, y и z докажите неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \sqrt{2}(xy + yz).$$

Первое решение. С помощью раскрытия скобок легко проверить, что

$$x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{2}(xy + yz) = \Big(x - \frac{y}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \Big(z - \frac{y}{\sqrt{2}}\Big)^2 \geqslant 0.$$

Второе решение. Заметим, что

$$2(x^2 + z^2) \geqslant x^2 + 2|x|\,|z| + z^2 = (|x| + |z|)^2.$$

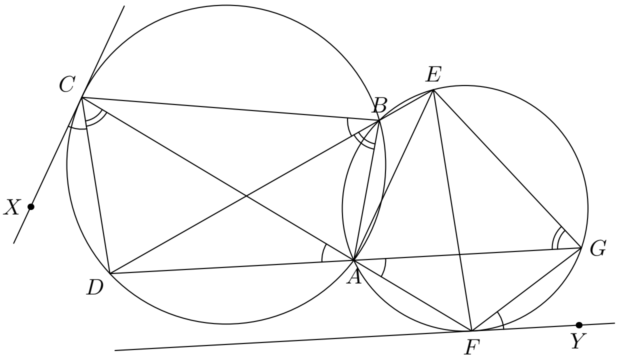
Следовательно,

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant y^2 + \frac{(|x| + |z|)^2}{2} \geqslant 2\sqrt{y^2 \cdot \frac{(|x| + |z|)^2}{2}}$$
$$= 2|y|\frac{|x| + |z|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|y|(|x| + |z|) \geqslant \sqrt{2}(xy + yz).$$

Третье решение. Положим $u = \frac{x+z}{\sqrt{2}}$ и $v = \frac{x-z}{\sqrt{2}}$. Тогда $x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$ и $z = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$\sqrt{2}y(x + z) = 2yu \leqslant y^2 + u^2 \leqslant y^2 + u^2 + v^2 = y^2 + x^2 + z^2.$$

3. Вокруг четырехугольника $ABCD$ описана окружность ω_1. Через точки A и B проведена окружность ω_2, пересекающая луч DB в точке $E \neq B$. Луч CA пересекает окружность ω_2 в точке $F \neq A$. Докажите, что если касательная к окружности ω_1 в точке C параллельна прямой AE, то касательная к окружности ω_2 в точке F параллельна прямой AD.



Решение. Пусть $G \neq A$ — точка пересечения прямой DA с окружностью ω_2. Отметим на касательной к ω_1 в точке C точку X так, чтобы $\angle DCX \leqslant 90°$, а на касательной к ω_2 в точке F точку Y так, чтобы $\angle GFY \leqslant 90°$.

По свойству касательной угол $\angle DCX$ равен половине дуги $\overset{\frown}{CD}$, а угол $\angle GFY$ равен половине дуги $\overset{\frown}{FG}$, поэтому

$$\angle DCX = \angle DBC = \angle DAC = \angle FAG = \angle GFY.$$

Из вписанности четырехугольника $ABCD$ следует, что $\angle DCA = \angle DBA$, а из вписанности четырехугольника $ABEG$, что $\angle DBA = 180° - \angle ABE = \angle AGE$. Таким образом, $\angle DCA = \angle AGE$. Далее, из вписанности четырехугольника $AEGF$ и параллельности прямых AE и CX следует, что

$$\angle FGE = \angle CAE = \angle ACX = \angle DCX + \angle DCA = \angle GFY + \angle AGE.$$

Стало быть, $\angle FGA = \angle GFY$ и прямые FY и AG параллельны.

4. Дан квадратный трехчлен $p(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами ($a \neq 0$) и такое целое число n, что

$$n < p(n) < p(p(n)) < p(p(p(n))).$$

Докажите, что a положительно.

Решение. Подставим в формулу $\frac{p(x)-p(y)}{x-y} = a(x+y)+b$ сначала $x = p(p(n))$ и $y = p(n)$, а затем $x = p(n)$ и $y = n$. Мы получим равенство

$$\frac{p(p(p(n))) - p(p(n))}{p(p(n)) - p(n)} - \frac{p(p(n)) - p(n)}{p(n) - n} =$$
$$= \big(a(p(p(n)) + p(n)) + b\big) - \big(a(p(n) + n) + b\big) = a(p(p(n)) - n).$$

Тогда

$$a(p(p(n)) - n) > -\frac{p(p(n)) - p(n)}{p(n) - n}$$

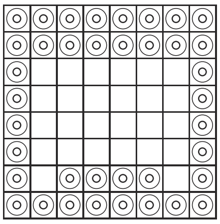
и, значит,

$$-a < \frac{p(p(n)) - p(n)}{(p(n) - n)(p(p(n)) - n)} < \frac{p(p(n)) - n}{(p(n) - n)(p(p(n)) - n)} = \frac{1}{p(n) - n} \leqslant 1.$$

Тогда $a > -1$ и $a \neq 0$. Стало быть, $a > 0$.

5. Какое наибольшее количество фишек можно расставить в клетках шахматной доски (в каждой клетке не более чем по одной фишке) так, чтобы на каждой диагонали стояло не более трех фишек.

Ответ: 38



Решение. Рассмотрим восьмиклеточную диагональ, состоящую из черных клеток, и параллельные ей диагонали, состоящие из черных клеток. На этих диагоналях 2, 4, 6, 8, 6, 4 и 2 клетки. На каждой из крайних диагоналей можно разместить не более двух фишек, на каждой из средних — не более трех, поэтому всего на черные клетки можно поставить не более $2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 19$ фишек. Аналогично не более 19 фишек можно разместить и на белых клетках. Следовательно, всего на доске можно поставить не более 38 фишек.

Пример расстановки 38 фишек показан на рисунке.

6. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых $a^3b - 1$ делится на $a+1$ и ab^3+1 делится на $b-1$.

Ответ: $a = b = 2$, $a = b = 3$ и $a = 1$, $b = 3$.

Первое решение. Поскольку $a^3b - 1$ делится на $a + 1$, число $b + 1 = b(a^3+1) - (a^3b-1)$ также делится на $a+1$. Аналогично из того, что ab^3+1 делится на $b - 1$ заключаем, что число $a + 1 = (ab^3 + 1) - a(b^3 - 1)$ также делится на $b - 1$. Таким образом, $b + 1$ делится на $a + 1$, которое, в свою очередь, делится на $b - 1$. Стало быть, $b + 1$ делится на $b - 1$ и, значит, $2 = (b+1)-(b-1)$ также делится на $b-1$. Следовательно, $b = 2$ или $b = 3$. В первом случае $3 = b + 1$ делится на $a + 1$ и, значит, $a = 2$; во втором $4 = b+1$ делится на $a+1$ и, значит, $a = 1$ или $a = 3$. Несложно убедиться, что ответы подходят.

Второе решение. Поскольку a^3b-1 делится на $a+1$, число $a^3(b+1) = (a^3+1)+(a^3b-1)$ также делится на $a+1$. Так как числа a и $a+1$ взаимно просты, $b+1$ делится на $a+1$. Аналогично из того, что ab^3+1 делится на $b-1$, заключаем, что число $(a+1)b^3 = (b^3-1)+(ab^3+1)$ также делится на $b-1$, а значит, и $a+1$ делится на $b-1$. Таким образом, $b+1$ делится на $a+1$, которое, в свою очередь, делится на $b-1$. Стало быть, $b+1$ делится на $b-1$. Но тогда $2 = (b+1)-(b-1)$ также делится на $b-1$ и, значит, $b = 2$ или $b = 3$. Если $b = 2$, то $3 = b+1$ делится на $a+1$ и $a = 2$. Проверка показывает, что $a = b = 2$ подходит. Если $b = 3$, то $4 = b+1$ делится на $a+1$ и $a = 3$ или $a = 1$. Проверка показывает, что обе ситуации возможны.

Третье решение. Поскольку ab^3+1 делится на $b-1$, число $b(ab^2+1) = (b-1)+(ab^3+1)$ также делится на $b-1$. Так как числа b и $b-1$ взаимно просты, ab^2+1 делится на $b-1$. Но тогда и $b(ab+1) = (b-1)+(ab^2+1)$ делится на $b-1$, а значит, и $ab+1$ делится на $b-1$. Делаем то же действие еще раз и получаем, что $b(a+1) = (b-1)+(ab+1)$ делится на $b-1$. Стало быть, $a+1$ делится на $b-1$.

С другой стороны, из того, что a^3b-1 делится на $a+1$, заключаем, что число $a(a^2b+1) = (a+1)+(a^3b-1)$ также делится на $a+1$, а значит, и a^2b+1 делится на $a+1$. Следовательно, a^2b+1 делится на $b-1$. Тогда $b(a^2+1)=(b-1)+(a^2b+1)$ делится на $b-1$. Стало быть, a^2+1 делится на $b-1$. Но тогда $2=(a^2+1)-(a-1)(a+1)$ также делится на $b-1$. Отсюда получаем, что $b=2$ или $b=3$. Если $b=2$, то $2(a^2-1)+3=2a^2+1=a^2b+1$ делится на $a+1$, то есть 3 делится на $a+1$, откуда $a=2$, и это нам подходит. Если же $b=3$, то $3(a^2-1)+4=3a^2+1=a^2b+1$ делится на $a+1$, то есть 4 делится на $a+1$, откуда $a=1$ или $a=3$, что также подходит.

Вариант 4

1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. На главный праздник за большим круглым столом разместились 100 островитян. Половина присутствующих произнесла фразу: «оба мои соседа лжецы», оставшиеся сказали: «среди моих соседей ровно один лжец». Какое наибольшее количество рыцарей может сидеть за этим столом?

Ответ: 67

Решение. Заметим, что три рыцаря не могут сидеть подряд, поскольку тогда средний рыцарь не мог произнести ни одну из требуемых фраз. Обозначим через k количество пар соседних рыцарей. Тогда каждый из рыцарей произнес фразу «среди моих соседей ровно один лжец», поэтому $2k \leqslant 50$. Кроме того, левее этой пары заведомо сидит лжец, и все эти лжецы разные. Назовем таких двух рыцарей и лжеца *тройкой*. В тройках задействовано $3k$ островитян. Рассмотрим оставшихся $100-3k$ островитян. Никакие два рыцаря среди них не сидят рядом друг с другом, а также рядом с рыцарями из тройки (иначе образуются три рыцаря подряд, что невозможно). Тогда левее каждого рыцаря должен сидеть лжец, все эти лжецы разные и отличны от лжецов, входящих в тройки. Таким образом, рыцарей не больше, чем $2k+\frac{1}{2}(100-3k)=50+\frac{k}{2}\leqslant 50+\frac{25}{2}=67\frac{1}{2}$. Стало быть, рыцарей не больше 67.

Приведем пример, показывающий, что 67 рыцарей могут быть:

ЛРР ЛРР ЛРР ... ЛРР ЛР ЛР ЛР ... ЛР Л

(блок «ЛРР» повторяется 25 раз, блок «ЛР» — 12 раз).

2. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $c^2+ab=a^2+b^2$. Докажите неравенство $c^2+ab\leqslant ac+bc$.

Первое решение. Достаточно проверить неравенство

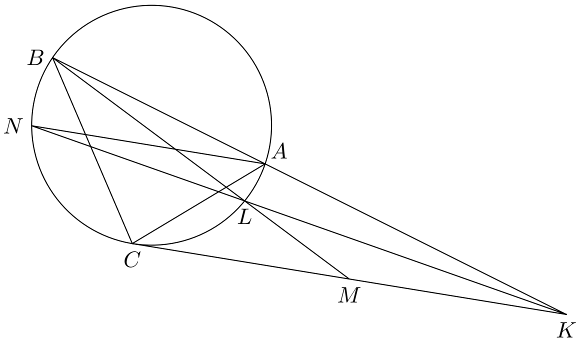
$$(a^2+b^2)^2=(c^2+ab)^2\leqslant(a+b)^2c^2=(a+b)^2(a^2-ab+b^2)=(a+b)(a^3+b^3)$$

или, что то же самое, $a^4+2a^2b^2+b^4\leqslant a^4+a^3b+ab^3+b^4$. Последнее очевидно, поскольку по неравенству о средних для двух чисел $2a^2b^2=2\sqrt{a^3b\cdot ab^3}\leqslant a^3b+ab^3$.

Второе решение. Можно считать, что $a\leqslant b$. Нам надо доказать неравенство $c^2-(a+b)c+ab\leqslant 0$. Рассмотрим выражение слева как квадратный трехчлен относительно c. Он неотрицателен, тогда и только тогда, когда c лежит между его корнями a и b. Таким образом достаточно проверить, что $a\leqslant c\leqslant b$. Это уже совсем просто:

$$c^2=b^2+a^2-ab=b^2+a(a-b)\leqslant b^2 \quad \text{и} \quad c^2=a^2+b^2-ab=a^2+b(b-a)\geqslant a^2.$$

3. Окружность ω описана вокруг остроугольного треугольника ABC. Касательная к окружности ω в точке C пересекает прямую AB в точке K. Точка M — середина отрезка CK. Прямая BM вторично пересекает окружность ω в точке L, а прямая KL вторично пересекает окружность ω в точке N. Докажите, что прямые AN и CK параллельны.



Решение. Поскольку KC — касательная к окружности ω, $\angle MCB = \angle MLC$ и, значит, треугольники MCB и MLC подобны. Поэтому $\frac{MB}{MC} = \frac{MC}{ML}$. Следовательно, $\frac{MB}{MK} = \frac{MK}{ML}$. Значит треугольники MKB и MLK подобны. Таким образом,

$$\angle CKN = \angle MKL = \angle MBK = \angle ABL = 180^\circ - \angle LNA = 180^\circ - \angle KNA.$$

Стало быть, углы $\angle CKN$ и $\angle KNA$ дают в сумме 180°, поэтому прямые AN и CK параллельны.

4. Числа u и v являются корнями квадратного трехчлена $x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами. Для любого натурального n докажите, что если a^2 делится на b, то $u^{2n} + v^{2n}$ делится на b^n.

Решение. Докажем индукцией по n, что $u^n + v^n$ делится на $b^{[n/2]}$. Базы $n = 1$ и $n = 2$ легко проверяются: $u + v$ делится на $b^0 = 1$ и $u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv = a^2 - 2b$ делится на b^1. Установим переход от $n-2$ и $n-1$ к n. Поскольку u — корень трехчлена, $u^2 = -au - b$ и, следовательно, $u^n = -au^{n-1} - bu^{n-2}$. Аналогично $v^n = -av^{n-1} - bv^{n-2}$. Сложим эти равенства, получим $u^n + v^n = -a(u^{n-1} + v^{n-1}) - b(u^{n-2} + v^{n-2})$. По индукционному предположению второе слагаемое делится на $b \cdot b^{[(n-2)/2]} = b^{[n/2]}$. Квадрат первого слагаемого делится на $a^2 \cdot b^{2[(n-1)/2]}$, что в свою очередь кратно b в степени $1 + 2[(n-1)/2] \geqslant n$. Стало быть, первое слагаемое делится на $b^{[n/2]}$.

5. Дана клетчатая доска $n \times n$. Ладья ходит по стандартным шахматным правилам (т. е. за ход можно переместить ладью в клетку, расположенную в той же строке или в том же столбце). При каких n можно посетить все клетки доски по одному разу, если сразу после горизонтального хода ладьи должен следовать вертикальный и наоборот. Если ладья изначально стоит в данной клетке или закончила в ней свой маршрут, то клетка считается посещенной. Начальную клетку ладьи можно выбирать.

Ответ: n – четно

Решение. Пусть n нечетно. Выберем такой столбец, в котором ладья не начинала и не заканчивала свой маршрут. Рассмотрим первый приход ладьи в этот столбец, он был по горизонтали. Значит, следующий ход был по вертикали и ладья посетила клетку в том же столбце, а дальше из него ушла. Аналогично в следующий приход ладья посетила две новые клетки этого столбца и т.д. Следовательно, ладья могла посетить лишь четное число клеток в этом столбце. Противоречие.

Пример обхода доски $n \times n$ при четном n:

1	4	5	$\dots$	$\dots$	$2n-4$	$2n-3$	n^2
2	3	6	$\dots$	$\dots$	$2n-5$	$2n-2$	$2n-1$
$4n-3$	$4n-4$	$4n-7$	$\dots$	$\dots$	$2n+4$	$2n+1$	$2n$
$4n-2$	$4n-5$	$4n-6$	$\dots$	$\dots$	$2n+3$	$2n+2$	$4n-1$
$6n-3$	$6n-4$	$6n-7$	$\dots$	$\dots$	$4n+4$	$4n+1$	$4n$
$6n-2$	$6n-5$	$6n-6$	$\dots$	$\dots$	$4n+3$	$4n+2$	$6n-1$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n^2-3	n^2-4	n^2-7	$\dots$	$\dots$	n^2-2n+4	n^2-2n+1	n^2-2n
n^2-2	n^2-5	n^2-6	$\dots$	$\dots$	n^2-2n+3	n^2-2n+2	n^2-1

6. Найдите все пары натуральных чисел n и k, для которых $(n+1)^k = n!+1$. (Как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n. Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.)

Ответ: $n = k = 1$, $n = 2$ и $k = 1$, $n = 4$ и $k = 2$.

Решение. Если $n = 1$, то $2^k = 1! + 1 = 2$, поэтому $k = 1$. Пусть $n \geqslant 2$, тогда число $n! + 1$ нечетное и, значит, $n + 1$ также нечетное. Стало быть, n — четно. Если $n = 2$, то $3^k = 2! + 1 = 3$, поэтому $k = 1$. Если $n = 4$, то $5^k = 4! + 1 = 25$, поэтому $k = 2$. Пусть теперь $n \geqslant 6$. Запишем n в виде $2m$, тогда $n! = (2m)! = (2m) \cdot (2m-1)!$. Факториал в правой части содержит множители m и 2, и они не совпадают, поскольку $m \geqslant 3$. Следовательно, $n!$ делится на $2m \cdot 2 \cdot m = n^2$. Тогда на n^2 должно делиться и число $(n+1)^k - 1$. Раскроем в выражении $(n+1)^k$ скобки, получится много слагаемых, в которых n входит хотя бы во второй степени, и добавка $kn+1$. Таким образом, $(n+1)^k - 1 = \ell n^2 + kn$ для некоторого натурального числа ℓ. Тогда k должно делиться на n и, в частности, $k \geqslant n$. Но в этом случае

$$(n+1)^k - 1 \geqslant (n+1)^n - 1 = n \cdot (n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-1} - 1 > n \cdot (n+1)^{n-1} > n^n > n!.$$

Поэтому равенство невозможно.