Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2015/2016 учебный год

Задания для 6-9 классов

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2015/2016 учебный год

Задания для 6–9 классов

1. (10 баллов) *Оцените значение отношения чисел A и B, если*

$$A = 1 \cdot 2 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 14 + 3 \cdot 6 \cdot 21 + 4 \cdot 8 \cdot 28\,,$$

$$B = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 10 + 3 \cdot 9 \cdot 15 + 4 \cdot 12 \cdot 20\,.$$

а) $0 < A/B < 1$*;*

б) $1 < A/B < 10$*;*

в) $10 < A/B < 100$*;*

г) среди перечисленных ответов нет верного.

Отметьте правильный вариант ответа, решение приводить не нужно.

2. (10 баллов) *Определите, сколько простых делителей имеет число* $17! - 15!$ *(здесь* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ *— факториал числа n, т.е. произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно).*

а) 6*;*

б) 7*;*

в) 8*;*

г) среди перечисленных ответов нет верного.

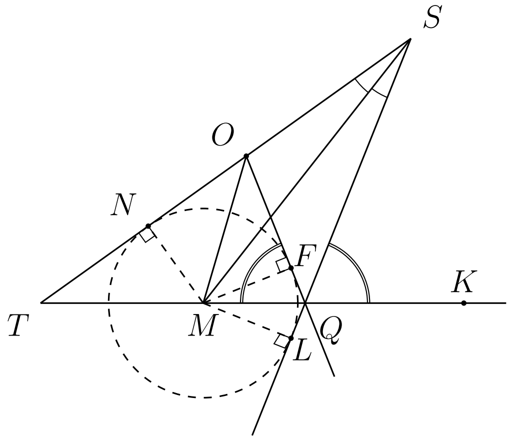
Отметьте правильный вариант ответа, решение приводить не нужно.

3. (20 баллов) *Будем говорить, что число имеет вид $\overline{aba}$, если у него первая и третья цифра одинаковы; вторая при этом не обязана быть другой. Например, 101 и 222 имеют такой вид, а 220 и 123 не имеют. Аналогичным образом определим вид числа $\overline{ababc}$. Сколько чисел вида $\overline{ababc}$ делятся на 5?*

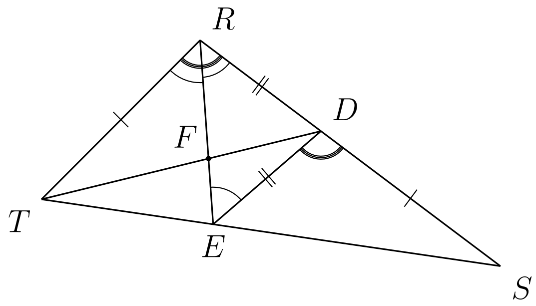
4. (20 баллов) *Незнайка придумал для своей электронной почты пароль, состоящий из пяти символов. Решив проверить надёжность этого пароля, он подсчитал все возможные комбинации, которые можно составить из данных пяти символов. В итоге получилось 20 различных комбинаций. Возможен ли пароль с таким числом комбинаций, или Незнайка ошибся в подсчётах? Если возможен, то приведите какой-нибудь пример подходящего пароля.*

5. (20 баллов) *Представьте число 2015 в виде суммы трех целых чисел, одно из которых простое, другое делится на 3, а третье число принадлежит интервалу (400; 500) и не делится на 3 (достаточно дать только ответ, решение приводить не нужно).*

6. (30 баллов) SM — *биссектриса в треугольнике* SQT. *Точка* O *на стороне* ST *такова, что угол* OQT *равен сумме углов* QTS *и* QST. *Докажите, что* OM — *биссектриса угла* QOT.



7. (30 баллов) *Пусть RE — биссектриса треугольника RST. Точка D на стороне RS такова, что $ED \parallel RT$, F — точка пересечения TD и RE. Докажите, что если $SD = RT$, то $TE = TF$.*



8. (30 баллов) *Дан четырехугольник $ELMI$. Известно, что сумма углов LME и MEI равна 180 градусам и $EL = EI + LM$. Докажите, что сумма углов LEM и EMI равна углу MIE.*

9. (40 баллов) *Вася и Миша выписывают на доске натуральные числа и вычисляют их квадраты. В какой-то момент оказалось, что для трех чисел n, k, l выполняется равенство $n^2 + k^2 = 2l^2$. Докажите, что число*

$$\frac{(2l-n-k)(2l-n+k)}{2}$$

является точным квадратом.

10. (40 баллов) *Известно, что числа s и r положительны и $r < s$. Докажите, что*

$$\frac{s^3-r^3}{s^3+r^3} > \frac{s^2-r^2}{s^2+r^2}.$$

11. (40 баллов) *На доске написаны пять различных положительных чисел. Оказалось, что для любых трех разных чисел a, b и c на доске число $ab + bc + ca$ рационально. Докажите, что отношение любых двух чисел на доске рационально.*