Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2015/2016 учебный год.

Задания для 6-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2015/2016 учебный год.

Задания для 6–9 классов

Вариант 1

1. *Дан такой квадратный трехчлен* $f(x)$, *что уравнение* $(f(x))^3 - f(x) = 0$ *имеет ровно три решения. Найдите ординату вершины трехчлена* $f(x)$.

Ответ:

2. *На 2016 карточках написали числа от 1 до 2016 (каждое по одному разу). Затем взяли* k *карточек. При каком наименьшем* k *среди них найдутся две карточки с числами, разность корней из которых меньше 1?*

Ответ:

3. *Вещественные числа* x, y *и* z *удовлетворяют условиям* $x + y + z = 0$ *и* $|x| + |y| + |z| \leqslant 1$. *Докажите неравенство*

$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \leqslant \frac{1}{3}\,.$$

4. *Можно ли так расставить в таблице* 300×300 *числа* 1 *и* -1, *что модуль суммы чисел во всей таблице меньше 30 000, а в каждом из прямоугольников* 3×5 *и* 5×3 *модуль суммы чисел больше 3?*

Ответ:

5. *Дан параллелограмм* $ABCD$. *Описанная окружность* ω *треугольника* ABC *второй раз пересекает сторону* AD *и продолжение стороны* DC *в точках* P *и* Q *соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника* PDQ *лежит на* ω.

6. *Целые числа* a, b *и* c *удовлетворяют равенству* $(a+3)^2+(b+4)^2-(c+5)^2 = a^2+b^2-c^2$. *Докажите, что обе части равенства являются точными квадратами.*

Вариант 2

1. *Найдите все такие многочлены $f(x)$ степени не выше второй, что для любых вещественных x и y, разность которых рациональна, разность $f(x) - f(y)$ также рациональна.*

Ответ:

2. *Какое наибольшее количество различных чисел от 1 до 1000 можно выбрать так, чтобы разность любых двух выбранных чисел не была равна ни одному из чисел 4, 5, 6.*

Ответ:

3. *Найдите наибольшее значение выражения*

$$\frac{a}{x} + \frac{a+b}{x+y} + \frac{a+b+c}{x+y+z},$$

где a, b, $c \in [2,3]$, а тройка чисел x, y и z есть некоторая перестановка тройки чисел a, b, c.

Ответ:

4. *Какое наибольшее количество шахматных королей можно расставить на доске 12×12 так, чтобы каждый король бил ровно одного из остальных?*

Ответ:

5. *Дан параллелограмм $ABCD$. Из вершины B опустили перпендикуляр BO на сторону AD. Окружность ω с центром в точке O проходит через точки A, B и пересекает продолжение стороны AD в точке K. Отрезок BK пересекает сторону CD в точке L, а луч OL пересекает окружность ω в точке M. Докажите, что KM биссектриса угла BKC.*

6. *Натуральные числа a и b таковы, что $a^2 + b^2 + a$ делится на ab. Докажите, что a является точным квадратом.*

Вариант 3

1. *Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(f(\sqrt{3}\,))=0$?*

Ответ:

2. *Из чисел 1, 2, 3, ..., 2016 выбраны k чисел. При каком наименьшем k среди выбранных чисел обязательно найдутся два числа, разность которых больше 672 и меньше 1344?*

Ответ:

3. *Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x+y\leqslant 1$. Докажите, что $12xy\leqslant 4x(1-y)+9y(1-x)$.*

4. *Дана доска 2016×2016. При каком наименьшем k клетки доски можно так раскрасить в k цветов, что*
1) одна из диагоналей покрашена в первый цвет;
2) клетки, симметричные относительно этой диагонали, покрашены в одинаковый цвет;
3) любые две клетки расположенные в одной строке по разные стороны от клетки первого цвета покрашены в разные цвета (клетки не обязательно соседние с клеткой первого цвета).

Ответ:

5. *Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность касается стороны AC треугольника ABC, а также продолжения сторон BA и BC в точках P и S соответственно. Отрезок PS пересекает стороны DA и DC в точках Q и R. Докажите, что вписанная окружность треугольника CDA касается сторон AD и DC в точках Q и R.*

6. *При каких натуральных n число*

$$\frac{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot(2n)!}{(n+1)!}$$

является точным квадратом? (Как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n. Например, $4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$.)

Ответ:

Вариант 4

1. *Квадратные трехчлены* $f(x)$ *и* $g(x)$ *таковы, что* $[f(x)] = [g(x)]$ *при всех* x. *Докажите, что* $f(x) = g(x)$ *при всех* x. *(Здесь* $[a]$ *означает целую часть* a, *то есть наибольшее целое число, не превосходящее* a*).*

2. *На встрече любителей кактусов 80 кактусофилов представили свои коллекции, каждая из которых состоит из кактусов разных видов. Оказалось, что ни один вид кактусов не встречается во всех коллекциях сразу, но у любых 15 человек есть кактусы одного и того же вида. Какое наименьшее общее количество видов кактусов может быть во всех коллекциях?*

Ответ:

3. *Для положительных чисел* x *и* y *докажите неравенство*

$$1 \leqslant \frac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{9}{8}\,.$$

4. *Клетки доски* 2015×2015 *раскрашены в шахматном порядке так, что угловые клетки черные. На одну из черных клеток поставлена фишка, а некоторая другая черная клетка отмечена. За ход разрешается переместить фишку на соседнюю клетку. Всегда ли можно обойти фишкой все клетки доски, побывав на каждой из них ровно по одному разу, и закончить обход в отмеченной клетке? (Две клетки являются соседними, если имеют общую сторону.)*

Ответ:

5. *Дан параллелограмм* $ABCD$ *с углом* $\angle B$, *равным* 60°. *Точка* O *— центр описанной окружности треугольника* ABC. *Прямая* BO *пересекает биссектрису внешнего угла* $\angle D$ *в точке* E. *Найдите отношение* $\frac{BO}{OE}$.

Ответ:

6. *Натуральные числа* a *и* b *таковы, что* a^3+b^3+ab *делится на* $ab(a-b)$. *Докажите, что* $HOK(a,b)$ *является точным квадратом. (НОК — наименьшее общее кратное).*

Вариант 5

1. *Дан такой квадратный трехчлен* $f(x)$, *что уравнение* $(f(x))^3 - 4f(x) = 0$ *имеет ровно три решения. Сколько решений имеет уравнение* $(f(x))^2 = 1$.

Ответ:

2. *На 2016 карточках написали числа от 1 до 2016 (каждое по одному разу). Затем взяли* k *карточек. При каком наименьшем* k *среди них найдутся две карточки с такими числами* a *и* b, *что* $\left|\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right| < 1$?

Ответ:

3. *Вещественные числа* x, y *и* z *удовлетворяют условиям* $x + y + z = 0$ *и* $|x| + |y| + |z| \leqslant 1$. *Докажите неравенство*

$$x + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} \leqslant \frac{2}{5}.$$

4. *Можно ли так расставить в таблице* 600×600 *числа* 1 *и* -1, *что модуль суммы чисел во всей таблице меньше 90 000, а в каждом из прямоугольников* 4×6 *и* 6×4 *модуль суммы чисел больше 4?*

Ответ:

5. *Трапеция* $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ *вписана в окружность* ω. *На луче* DC *за точкой* C *отмечена такая точка* E, *что* $BC = BE$. *Прямая* BE *вторично пересекает окружность* ω *в точке* F, *лежащей вне отрезка* BE. *Докажите, что центр описанной окружности треугольника* CEF *лежит на* ω.

6. *Целые числа* a, b *и* c *удовлетворяют равенству* $(a-5)^2+(b-12)^2-(c-13)^2 = a^2+b^2-c^2$. *Докажите, что обе части равенства являются точными квадратами.*