Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2015/2016 учебный год.

Задания для 6-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2015/2016 учебный год.

Задания для 6–9 классов

Вариант 1

1. *Дан такой квадратный трехчлен* $f(x)$, *что уравнение* $(f(x))^3 - f(x) = 0$ *имеет ровно три решения. Найдите ординату вершины трехчлена* $f(x)$.

Ответ:

2. *На 2016 карточках написали числа от 1 до 2016 (каждое по одному разу). Затем взяли* k *карточек. При каком наименьшем* k *среди них найдутся две карточки с числами, разность корней из которых меньше 1?*

Ответ:

3. *Вещественные числа* x, y *и* z *удовлетворяют условиям* $x + y + z = 0$ *и* $|x| + |y| + |z| \leqslant 1$. *Докажите неравенство*

$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \leqslant \frac{1}{3}\,.$$

4. *Можно ли так расставить в таблице* 300×300 *числа* 1 *и* -1, *что модуль суммы чисел во всей таблице меньше 30 000, а в каждом из прямоугольников* 3×5 *и* 5×3 *модуль суммы чисел больше 3?*

Ответ:

5. *Дан параллелограмм* $ABCD$. *Описанная окружность* ω *треугольника* ABC *второй раз пересекает сторону* AD *и продолжение стороны* DC *в точках* P *и* Q *соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника* PDQ *лежит на* ω.

6. *Целые числа* a, b *и* c *удовлетворяют равенству* $(a+3)^2+(b+4)^2-(c+5)^2 = a^2+b^2-c^2$. *Докажите, что обе части равенства являются точными квадратами.*

Вариант 2

1. *Найдите все такие многочлены $f(x)$ степени не выше второй, что для любых вещественных x и y, разность которых рациональна, разность $f(x)-f(y)$ также рациональна.*

Ответ:

2. *Какое наибольшее количество различных чисел от 1 до 1000 можно выбрать так, чтобы разность любых двух выбранных чисел не была равна ни одному из чисел 4, 5, 6.*

Ответ:

3. *Найдите наибольшее значение выражения*

$$\frac{a}{x}+\frac{a+b}{x+y}+\frac{a+b+c}{x+y+z},$$

где a, b, $c \in [2,3]$, а тройка чисел x, y и z есть некоторая перестановка тройки чисел a, b, c.

Ответ:

4. *Какое наибольшее количество шахматных королей можно расставить на доске 12×12 так, чтобы каждый король бил ровно одного из остальных?*

Ответ:

5. *Дан параллелограмм $ABCD$. Из вершины B опустили перпендикуляр BO на сторону AD. Окружность ω с центром в точке O проходит через точки A, B и пересекает продолжение стороны AD в точке K. Отрезок BK пересекает сторону CD в точке L, а луч OL пересекает окружность ω в точке M. Докажите, что KM биссектриса угла BKC.*

6. *Натуральные числа a и b таковы, что a^2+b^2+a делится на ab. Докажите, что a является точным квадратом.*

Вариант 4

1. *Квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $[f(x)] = [g(x)]$ при всех x. Докажите, что $f(x) = g(x)$ при всех x. (Здесь $[a]$ означает целую часть a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a).*

2. *На встрече любителей кактусов 80 кактусофилов представили свои коллекции, каждая из которых состоит из кактусов разных видов. Оказалось, что ни один вид кактусов не встречается во всех коллекциях сразу, но у любых 15 человек есть кактусы одного и того же вида. Какое наименьшее общее количество видов кактусов может быть во всех коллекциях?*

Ответ:

3. *Для положительных чисел x и y докажите неравенство*

$$1 \leqslant \frac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{9}{8}\,.$$

4. *Клетки доски* 2015×2015 *раскрашены в шахматном порядке так, что угловые клетки черные. На одну из черных клеток поставлена фишка, а некоторая другая черная клетка отмечена. За ход разрешается переместить фишку на соседнюю клетку. Всегда ли можно обойти фишкой все клетки доски, побывав на каждой из них ровно по одному разу, и закончить обход в отмеченной клетке? (Две клетки являются соседними, если имеют общую сторону.)*

Ответ:

5. *Дан параллелограмм* $ABCD$ *с углом* $\angle B$*, равным* $60°$*. Точка* O *— центр описанной окружности треугольника* ABC*. Прямая* BO *пересекает биссектрису внешнего угла* $\angle D$ *в точке* E*. Найдите отношение* $\frac{BO}{OE}$*.*

Ответ:

6. *Натуральные числа a и b таковы, что a^3+b^3+ab делится на $ab(a-b)$. Докажите, что НОК(a,b) является точным квадратом. (НОК — наименьшее общее кратное).*

Вариант 5

1. *Дан такой квадратный трехчлен $f(x)$, что уравнение $(f(x))^3 - 4f(x) = 0$ имеет ровно три решения. Сколько решений имеет уравнение $(f(x))^2 = 1$.*

Ответ:

2. *На 2016 карточках написали числа от 1 до 2016 (каждое по одному разу). Затем взяли k карточек. При каком наименьшем k среди них найдутся две карточки с такими числами a и b, что $\left|\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right| < 1$?*

Ответ:

3. *Вещественные числа x, y и z удовлетворяют условиям $x + y + z = 0$ и $|x| + |y| + |z| \leqslant 1$. Докажите неравенство*

$$x + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} \leqslant \frac{2}{5}\,.$$

4. *Можно ли так расставить в таблице* 600×600 *числа* 1 *и* -1*, что модуль суммы чисел во всей таблице меньше 90 000, а в каждом из прямоугольников* 4×6 *и* 6×4 *модуль суммы чисел больше 4?*

Ответ:

5. *Трапеция* $ABCD$ *(*$AB \parallel CD$*) вписана в окружность* ω*. На луче* DC *за точкой* C *отмечена такая точка* E*, что* $BC = BE$*. Прямая* BE *вторично пересекает окружность* ω *в точке* F*, лежащей вне отрезка* BE*. Докажите, что центр описанной окружности треугольника* CEF *лежит на* ω*.*

6. *Целые числа* a, b *и* c *удовлетворяют равенству* $(a-5)^2+(b-12)^2-(c-13)^2 = a^2+b^2-c^2$. *Докажите, что обе части равенства являются точными квадратами.*