Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2015/2016 учебный год

Задания для 10-11 классов

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2015/2016 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) *Из указанных ниже парабол выберите те, по отношению к которым точки* $A(-1, -1)$ *и* $B(0, 2)$ *лежат по одну сторону*

а) $y = 2x^2 + 4x$;

б) $y = x^2/2 - x - 3/2$;

в) $y = -x^2 + 2x - 1$;

г) $y = -x^2 - 4x - 3$;

д) $y = -x^2 + 3$;

е) среди перечисленных ответов нет верного.

Отметьте правильный вариант ответа, решение приводить не нужно.

2. (10 баллов) *В треугольнике* ABC *проведены медианы* AM *и* BK. *Известно, что* $AM = 3$, $BK = 5$. *Определите, какое из перечисленных утверждений является верным:*

а) длина стороны AB *может быть равна 6;*

б) периметр треугольника ABC *может быть равен 22;*

в) по данным задачи невозможно оценить ни периметр треугольника, ни сторону AB;

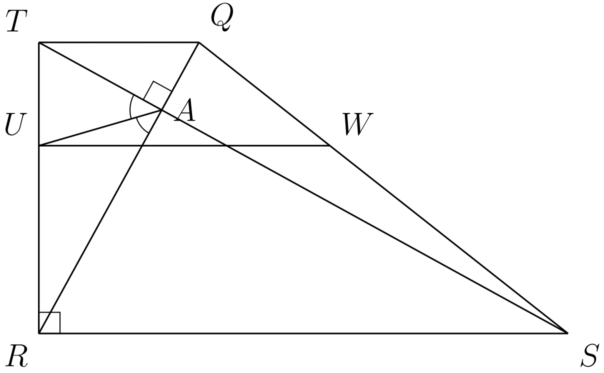
г) среди перечисленных ответов нет верного.

Отметьте правильный вариант ответа, решение приводить не нужно.

3. (20 баллов) *Будем говорить, что число имеет вид* $\overline{aba}$, *если у него первая и третья цифра одинаковы; вторая при этом обязана быть другой. Например, 101 и 292 имеют такой вид, а 222 и 123 не имеют. Аналогичным образом определим вид числа* $\overline{abcabd}$. *Сколько нечётных чисел вида* $\overline{adabcd}$ *делятся на 5?*

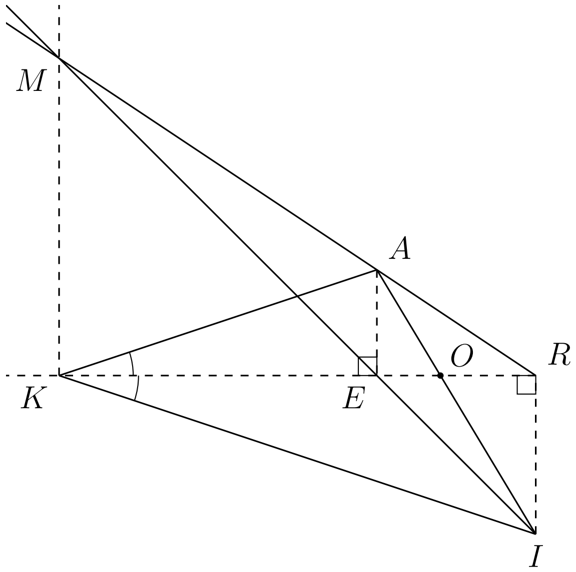
4. (20 баллов) *График некоторой четной функции проходит через точки с координатами* $(-1; 0)$, $(0{,}5; 2{,}5)$ *и* $(3; 0)$. *Укажите пример формулы, которая описывает такую функцию (достаточно дать только ответ, решение приводить не нужно).*

5. (30 баллов) *Диагонали трапеции $RSQT$ с основаниями RS и QT пересекаются в точке A под прямым углом. Известно, что основание RS больше основания QT и угол R прямой. Биссектриса угла RAT пересекает RT в точке U, а прямая, проходящая через точку U параллельно RS, пересекает прямую SQ в точке W. Докажите, что $UW = RT$.*



6. (30 баллов) *В треугольнике XYZ сторона YZ в два раза больше стороны XZ. На стороне YZ выбрана точка W так, что углы ZXW и ZYX равны. Прямая XW пересекает биссектрису внешнего угла при вершине Z в точке A. Докажите, что угол YAZ прямой.*

7. (30 баллов) *В треугольнике KIA сторона KA меньше стороны KI, а точки R и E — основания перпендикуляров, опущенных на биссектрису угла K из точек I и A соответственно. Докажите, что прямые IE, RA и перпендикуляр к KR, восстановленный в точке K, пересекаются в одной точке.*



8. (40 баллов) *На полоске написали по порядку числа от 1 до 1598 и разрезали её на несколько частей. Оказалось, что среднее арифметическое всех чисел первой части равно некоторому натуральному числу n, второй части — числу $2n$, третьей — числу $3n$ и т.д. Объясните при каких n это возможно.*

9. (40 баллов) *Числа s_1, s_2, …, s_{1008} таковы, что их сумма равна 2016^2. Известно, что*

$$\frac{s_1}{s_1+1} = \frac{s_2}{s_2+3} = \frac{s_3}{s_3+5} = \ldots = \frac{s_{1008}}{s_{1008}+2015}\,.$$

Найдите s_{17}.