Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2015/2016 учебный год

Задания для 6-9 классов

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2015/2016 учебный год

Задания для 6–9 классов

1. (10 баллов) *Оцените значение отношения чисел A и B, если*

$$A = 1 \cdot 2 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 14 + 3 \cdot 6 \cdot 21 + 4 \cdot 8 \cdot 28\,,$$

$$B = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 10 + 3 \cdot 9 \cdot 15 + 4 \cdot 12 \cdot 20\,.$$

а) $0 < A/B < 1$*;*

б) $1 < A/B < 10$*;*

в) $10 < A/B < 100$*;*

г) среди перечисленных ответов нет верного.

Отметьте правильный вариант ответа, решение приводить не нужно.

Ответ: а).

Решение. Нетрудно видеть, что и в числе A, и в числе B второе слагаемое в два раза больше первого, третье — в три раза, а четвертое — в четыре. Таким образом, отношение A к B равно отношению их первых слагаемых. Это отношение равно $\frac{14}{15}$, что меньше 1.

2. (10 баллов) *Определите, сколько простых делителей имеет число* $17! - 15!$ *(здесь* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ *— факториал числа n, т.е. произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно).*

а) 6*;*

б) 7*;*

в) 8*;*

г) среди перечисленных ответов нет верного.

Отметьте правильный вариант ответа, решение приводить не нужно.

Ответ: б).

Решение. Преобразуем: $17! - 15! = 15!\,(16 \cdot 17 - 1) = 15! \cdot 271$. Простыми делителями этого числа являются 2, 3, 5, 7, 11, 13, 271.

3. (20 баллов) *Будем говорить, что число имеет вид* $\overline{aba}$*, если у него первая и третья цифра одинаковы; вторая при этом не обязана быть другой. Например, 101 и 222 имеют такой вид, а 220 и 123 не имеют. Аналогичным образом определим вид числа* $\overline{ababc}$*. Сколько чисел вида* $\overline{ababc}$ *делятся на 5?*

Ответ: 180.

Решение. Числа, делящиеся на 5, — это числа, оканчивающиеся на 0 или 5, таким образом, для c имеем два варианта. Для a имеем 9 вариантов, так как число не может начинаться с нуля, значение же b может быть любым.

Отсюда получаем, что искомых чисел всего $2 \cdot 9 \cdot 10 = 180$.

4. (20 баллов) *Незнайка придумал для своей электронной почты пароль, состоящий из пяти символов. Решив проверить надёжность этого пароля, он подсчитал все возможные комбинации, которые можно составить из данных пяти символов. В итоге получилось 20 различных комбинаций. Возможен ли пароль с таким числом комбинаций, или Незнайка ошибся в подсчётах? Если возможен, то приведите какой-нибудь пример подходящего пароля.*

Ответ: Например, $error$.

Решение. Максимальное число различных комбинаций, которое можно составить из 5 символов, равняется $5!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ — факториал числа n, т.е. произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно). Такое число получается в случае, когда все эти 5 символов различны.

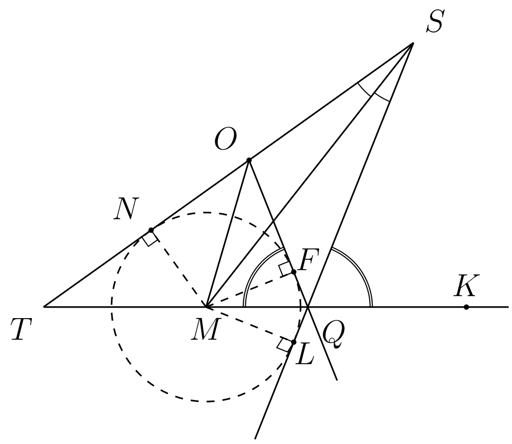
Пусть среди данных 5 символов имеется $k \leqslant 5$ одинаковых. Рассмотрим произвольную комбинацию этих символов. Очевидно, перестановка в рассматриваемой комбинации любых двух одинаковых символов между собой при оставлении на своих местах остальных символов не дает новой комбинации. Всего таких престановок между одинаковыми символами может быть $k!$. Таким образом, каждая комбинация символов, не являющихся одинаковыми, повторяется $k!$ раз. Значит, общее число различных комбинаций будет $5!/k!$. Аналогично, если помимо k одинаковых символов имеется еще n других одинаковых символов, то общее число различных комбинаций равняется $5!/(k! \cdot n!)$.

Нетрудно видеть, что 20 различных комбинаций получается при $k = 3$, $n = 1$.

5. (20 баллов) *Представьте число 2015 в виде суммы трех целых чисел, одно из которых простое, другое делится на 3, а третье число принадлежит интервалу (400; 500) и не делится на 3 (достаточно дать только ответ, решение приводить не нужно).*

Ответ: Например, $2015 = 7 + 1605 + 403$.

6. (30 баллов) *SM — биссектриса в треугольнике SQT. Точка O на стороне ST такова, что угол OQT равен сумме углов QTS и QST. Докажите, что OM — биссектриса угла QOT.*



Первое решение. Заметим, что $\angle QTS + \angle QST = \angle SQK$, где K лежит на продолжении отрезка TQ за точку Q. По условию, точка O лежит между T и S, значит, $\angle OQT = \angle SQK < 90^\circ$, и поэтому F — проекция точки M на прямую OQ — лежит на отрезке OQ. Аналогично, угол $TQS > 90^\circ$ и, следовательно, точка L — проекция точки M на прямую SQ — лежит за пределами отрезка SQ.

Угол MQL является вертикальным к углу SQK и поэтому равен углу OQT. Отсюда получаем, что прямоугольные треугольники MQF и MQL равны, т.е. $ML = MF$. Но, по условию, $ML = MN$ (так как SM биссектриса), следовательно, $MF = MN$ и OM является биссектрисой угла QOT.

Второе решение. По теореме синусов для треугольника TQO имеем

$$\frac{\sin\angle TQO}{TO} = \frac{\sin\angle QTO}{QO},$$

а для треугольника TQS —

$$\frac{\sin\angle TQS}{TS} = \frac{\sin\angle QTS}{TS}.$$

По условию, SM — биссектриса, следовательно

$$\frac{MT}{MQ} = \frac{ST}{SQ},$$

а

$$\angle OQT = \angle QTS + \angle QST = \angle KQS = \pi - \angle TQS,$$

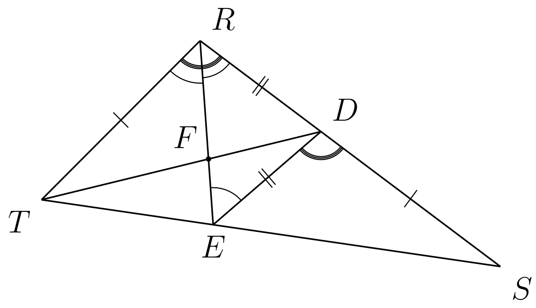
поэтому $\sin\angle TQO = \sin\angle TQS$.

Отсюда получаем, что

$$\frac{MT}{MQ} = \frac{ST}{SQ} = \frac{\sin\angle TQS}{\sin\angle QTS} = \frac{\sin\angle TQO}{\sin\angle QTO} = \frac{OT}{OQ}.$$

Таким образом, OM — биссектриса угла O в треугольнике TOQ.

7. (30 баллов) *Пусть RE — биссектриса треугольника RST. Точка D на стороне RS такова, что $ED \parallel RT$, F — точка пересечения TD и RE. Докажите, что если $SD = RT$, то $TE = TF$.*



Решение. Поскольку $DE \parallel RT$, то $\angle TRE = \angle RED$. Отсюда получаем, что треугольник RDE равнобедренный и $DR = DE$. Следовательно, треугольники RDT и DES равны по первому признаку (углы TRD и EDS равны как соответствующие при параллельных прямых, а $RT = SD$ по условию). Теперь покажем, что $TE = TF$.

Первый способ. $\angle TFE = \angle RFD$ как вертикальные, а $\angle RFD$ (из треугольника RFD) равен $180° - \angle FRD - \angle FDR$; но $\angle FRD = \angle FED$, а $\angle FDR = \angle DES$ из равенства треугольников TRD и DES. Таким образом, $\angle TFE = 180° - \angle SED - \angle DEF = \angle TEF$, и поэтому $TE = TF$.

Второй способ. Так как RF биссектриса в треугольнике RTD, то $\frac{RD}{RT} = \frac{FD}{FT}$; а поскольку RE — биссектриса в треугольнике RST, то $\frac{RS}{RT} = \frac{ES}{ET}$. Преобразуем последнее выражение:

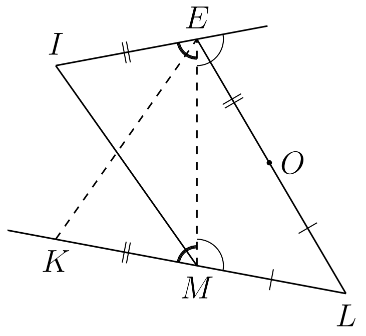
$$\frac{ES}{ET} = \frac{RS}{RT} = \frac{RD + DS}{RT} = \frac{RD}{RT} + 1 = \frac{FD}{FT} + 1 = \frac{FD + FT}{FT} = \frac{TD}{TF} = \frac{ES}{TF}\,.$$

Следовательно, $TE = TF$.

8. (30 баллов) *Дан четырехугольник $ELMI$. Известно, что сумма углов LME и MEI равна 180 градусам и $EL = EI + LM$. Докажите, что сумма углов LEM и EMI равна углу MIE.*

Решение. Отметим на луче LM за точкой M такую точку K, что $MK = IE$, и рассмотрим треугольники IEM и KEM. По построению, $\angle LME + \angle EMK = 180°$, а по условию $\angle LME + \angle MEI = 180°$, следовательно, $\angle KME = \angle MEI$; стороны MK и EI равны по построению, а сторона ME у этих трегольников общая. Поэтому треугольники равны по первому признаку.

Следовательно, $\angle MIE = \angle EKM$, а $\angle EMI = \angle MEK$, поэтому $\angle LEM + \angle EMI = \angle LEM + \angle MEK = \angle LEK$. Но треугольник LEK — равнобедренный



с основанием KE, т.к. $EL = EI + ML = MK + ML = KL$. Отсюда получаем, что $\angle LKE = \angle LEK$, т.е. $\angle MIE = \angle LEK$.

9. (40 баллов) *Вася и Миша выписывают на доске натуральные числа и вычисляют их квадраты. В какой-то момент оказалось, что для трех чисел n, k, l выполняется равенство $n^2 + k^2 = 2l^2$. Докажите, что число*

$$\frac{(2l-n-k)(2l-n+k)}{2}$$

является точным квадратом.

Решение. Преобразуем числитель:

$$(2l-n-k)(2l-n+k) = (2l-n)^2 - k^2 = 4l^2 - 4ln + n^2 - k^2.$$

По условию $k^2 = 2l^2 - n^2$, откуда получаем

$$4l^2 - 4ln + n^2 - \left(2l^2 - n^2\right) = 2l^2 - 4ln + 2n^2 = 2(l-n)^2.$$

Таким образом, исходное выражение является квадратом числа $l - n$.

10. (40 баллов) *Известно, что числа s и r положительны и $r < s$. Докажите, что*

$$\frac{s^3 - r^3}{s^3 + r^3} > \frac{s^2 - r^2}{s^2 + r^2}\,.$$

Решение. Воспользовавшись формулами суммы и разности кубов, а также разности квадратов, получим, что необходимо доказать неравенство

$$\frac{(s-r)\left(s^2+sr+r^2\right)}{(s+r)\left(s^2-sr+r^2\right)} > \frac{(s-r)(s+r)}{s^2+r^2}\,.$$

По условию $s > r > 0$, поэтому сокращение на множитель $s - r$ и домножение на множитель $s + r$ не приведут к изменению знака неравенства. Отсюда получаем

$$\frac{s^2+sr+r^2}{s^2-sr+r^2} > \frac{s^2+2sr+r^2}{s^2+r^2} \Leftrightarrow 1 + \frac{2sr}{s^2-sr+r^2} > 1 + \frac{2sr}{s^2+r^2}\,.$$

Числа s и r положительны, следовательно, полученное неравенство равносильно следующему

$$\frac{1}{s^2 - sr + r^2} > \frac{1}{s^2 + r^2}\,.$$

Знаменатели обеих дробей положительны, т.к. $s^2 - sr = s(s - r) > 0$, и при этом $s^2 - sr < s^2$. Что и требовалось доказать.

11. (40 баллов) *На доске написаны пять различных положительных чисел. Оказалось, что для любых трех разных чисел a, b и c на доске число $ab + bc + ca$ рационально. Докажите, что отношение любых двух чисел на доске рационально.*

Решение. Пусть a, b, c и d некоторые четыре числа из написанных на доске. Тогда $ab + bc + ca$ и $ab + bd + da$ рациональны, следовательно, их разность $bc + ca - bd - da = (a + b)(c - d)$ тоже рациональна.

Аналогично, разность рациональных чисел $ac + cd + da$ и $bc + cd + db$, равная $ac + ad - bc - bd = (a - b)(c + d)$, тоже рациональна. Тогда рациональна и сумма $(a+b)(c-d)+(a-b)(c+d) = 2(ac-bd)$. Откуда число $b(a+d+c) = ab+bd+bc = ab + bc + ca + (bd - ac)$ рационально. Если $b(a + d + c)$ и $e(a + d + c)$ оба рациональны, то их частное (все числа положительны) b/e тоже рационально. Что и требовалось доказать.