Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2015/2016 учебный год.

Задания для 6-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2015/2016 учебный год.

Задания для 6–9 классов

Вариант 1

1. *Дан такой квадратный трехчлен $f(x)$, что уравнение $(f(x))^3 - f(x) = 0$ имеет ровно три решения. Найдите ординату вершины трехчлена $f(x)$.*

Ответ: 0.

Решение. Предположим, что старший коэффициент трехчлена положителен. Заметим, что $(f(x))^3 - f(x) = f(x) \cdot (f(x) - 1) \cdot (f(x) + 1)$. Уравнение $f(x) = 0$ имеет больше корней, чем уравнение $f(x) = -1$, и меньше корней, чем уравнение $f(x) = 1$. Ясно также, что никакие два уравнения не имеют общих корней. Тогда уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно один корень. Следовательно, ордината вершины трехчлена $f(x)$ равна нулю. Аналогично разбирается и случай, когда старший коэффициент трехчлена отрицателен.

2. *На 2016 карточках написали числа от 1 до 2016 (каждое по одному разу). Затем взяли k карточек. При каком наименьшем k среди них найдутся две карточки с числами, разность корней из которых меньше 1?*

Ответ: 45.

Решение. Покажем, что $k = 45$ подходит. Разобьем числа от 1 до 2016 на 44 группы:

$$(1, 2, 3),\ (4, 5, 6, 7, 8),\ (9, 10, \ldots, 15),\ \ldots,\ (k^2, k^2 + 1, \ldots, k^2 + 2k),\ \ldots,$$
$$(1936, 1937, \ldots, 2016).$$

Поскольку чисел 45, какие-то два из них (назовем их a и b) окажутся в одной группе. Пусть для определенности $a < b$. Тогда $k^2 \leqslant a < b < (k+1)^2$ и, следовательно, $\sqrt{b} - \sqrt{a} < (k+1) - k = 1$.

Предъявим теперь 44 числа, все разности между корнями из которых не меньше 1:

$$1^2, \quad 2^2, \quad 3^2, \quad 4^2, \quad \ldots, \quad 44^2.$$

3. *Вещественные числа x, y и z удовлетворяют условиям $x + y + z = 0$ и $|x| + |y| + |z| \leqslant 1$. Докажите неравенство*

$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \leqslant \frac{1}{3}\,.$$

Решение. Действительно,

$$3\Big(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\Big)=2(x+y+z)+x-\frac{y}{2}-z\leqslant 2(x+y+z)+|x|+|y|+|z|=1.$$

4. *Можно ли так расставить в таблице 300×300 числа 1 и -1, что модуль суммы чисел во всей таблице меньше 30 000, а в каждом из прямоугольников 3×5 и 5×3 модуль суммы чисел больше 3?*

Ответ: нет.

Решение. Поскольку сумма чисел в прямоугольнике 3×5 нечетна, если ее модуль больше трех, то он хотя бы пять. Предположим, что такая расстановка нашлась. Заметим, что в ней либо нет ни одной строки, состоящей из одних $+1$, либо нет ни одного столбца, состоящего из одних -1 (если есть и такая строка, и такой столбец, то в их общей клетке с одной стороны должна стоять $+1$, с другой -1). Разберем первый случай (второй разбирается аналогично). Рассмотрим прямоугольник 3×5, расположенный в левом верхнем углу. Модуль суммы чисел в нем хотя бы 5. Сдвинем этот прямоугольник на одну клетку вправо. В нем модуль суммы чисел также хотя бы 5. Поскольку по сравнению с первым прямоугольником у него одна тройка чисел заменена на другую, суммы чисел в прямоугольниках отличаются не более, чем на 6. Но тогда они должны быть одного знака, ибо $+5$ и -5 отличаются больше, чем на 6. Сдвинем прямоугольник еще на одну клетку вправо и снова получим, что сумма чисел в нем того же знака, что и в предыдущем, и т. д.. Таким образом, мы установим, что все суммы чисел в сдвинутых вправо прямоугольниках одного знака. Тогда модуль суммы чисел в трех верхних строках не меньше, чем $60\cdot 5=300$, поскольку эти строки разбиваются на 60 таких прямоугольников. Аналогичный вывод можно сделать про любые три соседние строки.

Рассмотрим три верхние строки. Модуль суммы чисел в них не меньше, чем 300. Модуль суммы чисел в строках со второй по четвертую также не меньше, чем 300. Эти суммы должны быть одного знака, поскольку в противном случае они различаются не менее, чем на 600. С другой стороны, они отличаются не больше, чем на разность сумм чисел в первой и четвертой строке, которая не больше, чем 600, причем равенство достигается только тогда, когда в одной из строк стоят исключительно $+1$, что невозможно. Таким образом, сумма чисел в каждых трех строках также одного знака и не меньше 300 по модулю. Следовательно, во всей таблице модуль суммы чисел не меньше, чем $300\cdot 100=30\,000$. Противоречие.

5. *Дан параллелограмм $ABCD$. Описанная окружность ω треугольника ABC второй раз пересекает сторону AD и продолжение стороны DC в точках P и Q соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника PDQ лежит на ω.*

Решение. Трапеции $ABCP$ и $ACQD$ вписаны в окружность ω, значит, они являются равнобочными и, в частности, у них равны диагонали. Тогда $PB=AC=BQ$, и точка B лежит на серединном перпендикуляре к PQ. Обозначим точку его пересечения с окружностью ω через O. Тогда точки B и O диаметрально противоположны и, значит, $\angle BCO = 90^\circ$. В силу равнобочности трапеции $ABCP$ и равенства противоположных сторон параллелограмма $ABCD$, имеем $PC = AB = CD$. Поэтому C лежит на серединном перпендикуляре к PD. Но CO перпендикулярно BC, а, значит, и AD. Следовательно, O также лежит на серединном перпендикуляре к PD. Итак, точка O лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам PQ и PD. Стало быть, она является центром описанной окружности треугольника PDQ.

6. *Целые числа a, b и c удовлетворяют равенству $(a+3)^2+(b+4)^2-(c+5)^2 = a^2+b^2-c^2$. Докажите, что обе части равенства являются точными квадратами.*

Решение. Раскрыв скобки в условии, получим, что $6a + 8b - 10c = 0$. Тогда

$$5^2(a^2 + b^2 - c^2) = (5a)^2 + (5b)^2 - (3a + 4b)^2 = (4a - 3b)^2.$$

Следовательно, $4a - 3b$ делится на 5, т. е. $4a - 3b = 5k$ для некоторого целого k и

$$a^2 + b^2 - c^2 = \frac{(4a - 3b)^2}{5^2} = k^2.$$

Вариант 2

1. *Найдите все такие многочлены $f(x)$ степени не выше второй, что для любых вещественных x и y, разность которых рациональна, разность $f(x) - f(y)$ также рациональна.*

Ответ: линейные с рациональным старшим коэффициентом или константы.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда при любом x разность

$$f(x+1) - f(x) = \big(a(x+1)^2 + b(x+1) + c\big) - \big(ax^2 + bx + c\big) = 2ax + a + b$$

рациональна. Если $a \neq 0$ это невозможно, поскольку уравнение $2ax + a + b = \sqrt{2}$ имеет решение относительно x. Стало быть, $a = 0$ и $f(x) = bx + c$. Тогда разность

$$f(2) - f(1) = (2b + c) - (b + c) = b$$

рациональна. Значит, b — рациональное число.

Осталось заметить, что все функции $f(x) = bx + c$ с рациональным b подходят, поскольку число

$$f(x) - f(y) = (bx + c) - (by + c) = b(x - y)$$

рационально для любой рациональной разности $x - y$.

2. *Какое наибольшее количество различных чисел от 1 до 1000 можно выбрать так, чтобы разность любых двух выбранных чисел не была равна ни одному из чисел 4, 5, 6.*

Ответ: 400.

Решение. Рассмотрим десять последовательных натуральных чисел. Докажем, что среди них выбрано не более четырех. Если выбрано хотя бы пять чисел, то три из них одной четности, но тогда их попарные разности не могут быть равны лишь 2 и 8. Действительно, если $a < b < c$, то $b - a = 2$ и $c - a = 8$, но тогда $c - b = 6$, что невозможно. Таким образом, в каждой десятке не более четырех выбранных чисел, а в первой тысяче чисел их не более 400, поскольку в тысяче сто десяток.

Если взять все числа, оканчивающиеся на 1, 2, 3 или 4, то их будет ровно 400, но никакая разность не равна 4, 5 или 6.

3. *Найдите наибольшее значение выражения*

$$\frac{a}{x} + \frac{a+b}{x+y} + \frac{a+b+c}{x+y+z},$$

где a, b, $c \in [2, 3]$, а тройка чисел x, y и z есть некоторая перестановка тройки чисел a, b, c.

Ответ: $3,75$.

Решение. Докажем, что

$$\frac{a}{x} + \frac{a+b}{x+y} + \frac{a+b+c}{x+y+z} \leqslant \frac{15}{4}.$$

Заметим, что последняя дробь равна 1 и $a/x \leqslant 3/2$. Осталось показать, что $\frac{a+b}{x+y} \leqslant \frac{5}{4}$. Поскольку числа x и y — некоторая пара чисел из a, b и c, какое-то одно из них совпадает с a или с b. Таким образом, достаточно доказать, что $\frac{u+v}{v+w} \leqslant \frac{5}{4}$ для u, v, $w \in [2,3]$. Или что тоже самое, $4u \leqslant v + 5w$. Но это очевидно, ибо $4u \leqslant 12 \leqslant v + 5w$.

Если $a = z = 3$, $b = c = x = y = 2$, то

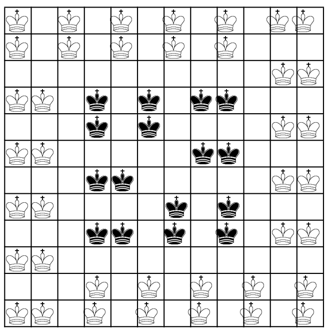
$$\frac{a}{x} + \frac{a+b}{x+y} + \frac{a+b+c}{x+y+z} = \frac{3}{2} + \frac{3+2}{2+2} + \frac{3+2+2}{2+2+3} = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + 1 = \frac{15}{4}.$$

4. *Какое наибольшее количество шахматных королей можно расставить на доске* 12×12 *так, чтобы каждый король бил ровно одного из остальных?*

Ответ: 56.

Решение. Заметим, что два короля бьют друг друга тогда и только тогда, когда их клетки имеют хотя бы одну общую вершину. Для каждой пары бьющих друг друга королей отметим вершины клеток, на которых они стоят. При этом для каждой такой пары отмечено не менее шести вершин. Поскольку для разных пар королей отмечаются разные вершины (иначе бы какой-то король бил более чем одного короля) всего пар королей не более, чем $[13^2/6] = 28$, а королей — не более 56.

Расстановка 56 королей показана на рисунке.



5. *Дан параллелограмм $ABCD$. Из вершины B опустили перпендикуляр BO на сторону AD. Окружность ω с центром в точке O проходит через точки A, B и пересекает продолжение стороны AD в точке K. Отрезок BK пересекает сторону CD в точке L, а луч OL пересекает окружность ω в точке M. Докажите, что KM биссектриса угла BKC.*

Решение. Поскольку $OA = OB = OK$ и $\angle BOA = 90°$, прямоугольные треугольники ABO и BOK являются равнобедренными и, значит, $\angle BAK = \angle BKA = 45°$.

А по свойству углов параллелограмма $\angle KBC = \angle CDK = 45^\circ$. Тогда четырехугольник $BDKC$ вписанный. Следовательно, $\angle BKC = \angle BDC$. Поскольку $\angle BLD = \angle LDK + \angle LKD = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ и $\angle BOD = 90^\circ$, четырехугольник $BLDO$ вписанный. Поэтому $\angle BDC = \angle BOM$. Осталось заметить, что $\angle BOM$ — центральный угол, опирающийся на дугу BM, а $\angle BKM$ — вписанный угол, опирающийся на дугу BM. Следовательно, $\angle BKC = \angle BDC = \angle BOM = 2\angle BKM$ и KM — биссектриса угла BKC.

6. *Натуральные числа a и b таковы, что $a^2 + b^2 + a$ делится на ab. Докажите, что a является точным квадратом.*

Решение. Если $n = a^2 + b^2 + a$ делится на ab, то n делится и на a. Значит, b^2 делится на a. Стало быть, $b^2 = ka$. Покажем, что a и k взаимно просты. Предположим противное. Тогда найдется такое простое число p, что a и k делятся на p. При этом b^2 делится на p и, значит, b также делится на p. Заметим далее, что $n = a^2 + b^2 + a = a^2 + ka + a$ делится на ab. Тогда $a + k + 1$ делится на b и, в частности, на p. Но это невозможно, поскольку a и k делятся на p, а 1 не делится. Итак, числа a и k взаимно просты и в произведении дают точный квадрат. Следовательно, они сами являются точными квадратами.

Вариант 3

1. *Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(f(\sqrt{3}\,))=0$?*

Ответ: да.

Решение. Например, подходит трехчлен $f(x) = 2x^2 - 8$. Действительно, $f(\sqrt{3}\,) = -2$, что является корнем $f(x)$.

2. *Из чисел 1, 2, 3, …, 2016 выбраны k чисел. При каком наименьшем k среди выбранных чисел обязательно найдутся два числа, разность которых больше 672 и меньше 1344?*

Ответ: 674.

Решение. Пусть $n = 672$. Тогда $2n = 1344$ и $3n = 2016$. Предположим, что можно так выбрать $674 = n+2$ числа, что среди них не найдется нужной пары чисел. Пусть m — наименьшее из выбранных чисел. Тогда числа $m+n+1$, $m+n+2$, $\ldots$, $m+2n-1$ не выбраны. Удалим их и число m из набора $\{1, \ldots, 3n\}$, а оставшееся множество обозначим через E. Рассмотрим пары чисел

$$\begin{aligned}&(1, n+2), \quad (2, n+3), \quad \ldots (m-1, m+n),\\&(m+1, m+2n), \quad (m+2, m+2n+1), \quad \ldots, \quad (n+1, 3n).\end{aligned}$$

Их $(m-1)+(n-m+1) = n$ штук. Заметим, что объединение левых и правых частей этих пар дает множество E. Тогда любое выбранное число совпадает с левой или правой частью одной из пар. По предположению таких чисел ровно $n+1$, поэтому найдутся два из них, например a и b, принадлежащие одной паре. Тогда их разность равна $n+1$ или $2n-1$. Значит, a и b удовлетворяют условию задачи, что невозможно.

Если выбраны числа 1, 2, 3, …, 673, то нужные два числа найти не удастся.

3. *Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x+y \leqslant 1$. Докажите, что $12xy \leqslant 4x(1-y) + 9y(1-x)$.*

Решение. Из неравенства $x+y \leqslant 1$ заключаем, что $y \leqslant 1-x$ и $x \leqslant 1-y$. Следовательно, по неравенству о средних для двух чисел

$$4x(1-y) + 9y(1-x) \geqslant 4x^2 + 9y^2 \geqslant 12xy.$$

4. *Дана доска* 2016×2016. *При каком наименьшем k клетки доски можно так раскрасить в k цветов, что*

1) одна из диагоналей покрашена в первый цвет;

2) клетки, симметричные относительно этой диагонали, покрашены в одинаковый цвет;

3) любые две клетки расположенные в одной строке по разные стороны от клетки первого цвета покрашены в разные цвета (клетки не обязательно соседние с клеткой первого цвета).

Ответ: 11.

Решение. Пусть в первый цвет покрашены клетки диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний. Обозначим через C_i множество цветов, в которые покрашены клетки i-й строки, расположенные левее диагонали единичного цвета. Докажем, что $C_i \neq C_j$ при $i < j$. Действительно, клетка, расположенная в i-й строке и j-м столбце, имеет цвет, не входящий в C_i. Но в такой же цвет покрашена и клетка, расположенная в j-й строке и i-м столбце, а ее цвет входит в C_j. Таким образом, множества C_1, C_2, $\ldots$, C_{2016} — различные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, k\}$. Тогда их не более, чем 2^k штук. Стало быть, $k \geqslant 11$.

По индукции покажем, как требуемым образом покрасить доску $2^k \times 2^k$ в k цветов. Этого будет достаточно, поскольку, оставив лишь строки с 1-й по 2016-ю и столбцы с 1-го по 2016-й, мы получим доску 2016×2016 с требуемой покраской.

База $k = 1$ очевидна, поскольку доску 2×2 можно покрасить в один цвет. Переход от k к $k+1$. Если мы уже умеем красить требуемым образом доску $2^k \times 2^k$, то доску $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ покрасим так: разместим две копии доски $2^k \times 2^k$ одну в левом верхнем угле, другую в правом нижнем, а остальные клетки покрасим в $(k+1)$-й цвет.

5. *Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность касается стороны AC треугольника ABC, а также продолжения сторон BA и BC в точках P и S соответственно. Отрезок PS пересекает стороны DA и DC в точках Q и R. Докажите, что вписанная окружность треугольника CDA касается сторон AD и DC в точках Q и R.*

Решение. Докажем, что вписанная окружность треугольника ADC касается стороны AD в точке Q. Поскольку BP и BS — равные отрезки касательных, треугольник BPS равнобедренный, а, значит, равнобедренным является и треугольник APQ, отсекаемый от него прямой AQ, параллельной BS. Следовательно, $AP = AQ$. Снова пользуясь равенством отрезков касательных, получим, что $2BP = BP + BS = AB + BC + CA$. Стало быть,

$$AQ = AP = BP - AB = \frac{AB + BC + CA}{2} - AB =$$
$$= \frac{BC + CA - AB}{2} = \frac{AD + AC - CD}{2}.$$

Откуда по свойству точек касания заключаем, что Q — точка касания вписанной окружности треугольника ADC.

6. *При каких натуральных n число*

$$\frac{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot (2n)!}{(n+1)!}$$

является точным квадратом? (Как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n. Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.)

Ответ: для чисел вида $n = 4k(k+1)$ и $n = 2k^2 - 1$.

Решение. Достаточно понять, при каких n число $A = (n+1)! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot (2n)!$ является точным квадратом. Заметим, что $(2k-1)!(2k)! = 2k \cdot \big((2k-1)!\big)^2$. Поэтому

$$A = (n+1)! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot \big(1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot (2n-1)!\big)^2.$$

Следовательно, число A является точным квадратом если и только, если число

$$(n+1)! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) = (n+1)! \cdot 2^n \cdot n! = (n!)^2 \cdot 2^n(n+1)$$

является точным квадратом. Это равносильно тому, что число $B = 2^n(n+1)$ — точный квадрат. Если n — четно, то B является точным квадратом тогда и только тогда, когда $n+1$ — квадрат нечетного числа. Таким образом, $n+1 = (2k+1)^2$ и, значит, $n = 4k^2 + 4k$ для некоторого натурального k. Если же n — нечетно, то B является точным квадратом тогда и только тогда, когда $2(n+1)$ — квадрат четного числа. Стало быть, $2(n+1) = (2k)^2$ и, значит, $n = 2k^2 - 1$ для некоторого натурального k.

Вариант 4

1. *Квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $[f(x)] = [g(x)]$ при всех x. Докажите, что $f(x) = g(x)$ при всех x. (Здесь $[a]$ означает целую часть a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a).*

Решение. Пусть $h(x) = f(x) - g(x) = ax^2 + bx + c$. Из равенства $[f(x)] = [g(x)]$ следует, что $|h(x)| = |f(x) - g(x)| \leqslant 1$. Но квадратный трехчлен принимает сколь угодно большие по модулю значения. Следовательно, $a = 0$. С другой стороны, при $b \neq 0$ значение $|bx + c|$ в точке $-c/b + 2/b$ равно двум, поэтому и $b = 0$. Стало быть, $f(x) = g(x) + c$. Пусть $c \neq 0$. Можно считать, что $c > 0$ (иначе поменяем местами трехчлены f и g). Рассмотрим такое целое число n, которое является значением многочлена $f(x)$ в некоторой точке. Обозначим эту точку через x_0. Тогда $g(x_0) = f(x_0) - c < f(x_0) = n$ и, значит, $[g(x_0)] < n = [f(x_0)]$.

2. *На встрече любителей кактусов 80 кактусофилов представили свои коллекции, каждая из которых состоит из кактусов разных видов. Оказалось, что ни один вид кактусов не встречается во всех коллекциях сразу, но у любых 15 человек есть кактусы одного и того же вида. Какое наименьшее общее количество видов кактусов может быть во всех коллекциях?*

Ответ: 16.

Решение. Покажем, что 16 кактусов могло быть. Занумеруем кактусы числами от 1 до 16. Пусть у 1-го кактусофила есть все кактусы, кроме первого; у 2-го — все, кроме второго кактуса; у 15-го — все, кроме пятнадцатого кактуса; а у кактусофилов с 16-го по 80-го есть все кактусы, кроме шестнадцатого. Тогда у любых 15 кактусофилов найдется общий вид кактусов.

Установим теперь, что у них должно быть больше 15 кактусов. Предположим противное: пусть всего у них $k \leqslant 15$ кактусов. Занумеруем кактусы числами от 1 до k. Для кактуса с номером i найдется кактусофил A_i, у которого его нет. Но тогда для кактусофилов A_1, A_2, …, A_k нет кактуса, который был бы у всех. И, тем более, нет такого кактуса, если мы к ним добавим еще нескольких кактусофилов так, чтобы их количество стало равно 15. Противоречие.

3. *Для положительных чисел x и y докажите неравенство*

$$1 \leqslant \frac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{9}{8}.$$

Решение. Левое неравенство равносильно неравенству $(x^2+y^2)^2 \leqslant (x+y)(x^3+y^3)$, которое после раскрытия скобок, приведения подобных слагаемых и деления на xy

сводится к неравенству $2xy \leqslant x^2 + y^2$. Домножим обе части правого неравенства на $(x^2 + y^2)^2$. Получим неравенство

$$x^4 + x^3y + xy^3 + y^4 = (x+y)(x^3+y^3) \leqslant (x^2+y^2)^2 + \frac{(x^2+y^2)^2}{8}\,.$$

Раскроем скобки в $(x^2+y^2)^2$ и сократим на x^4+y^4. Тогда получим неравенство

$$x^3y + xy^3 = xy(x^2+y^2) \leqslant 2x^2y^2 + \frac{(x^2+y^2)^2}{8}\,.$$

Оно непосредственно следует из неравенства о средних для двух чисел.

4. *Клетки доски* 2015×2015 *раскрашены в шахматном порядке так, что угловые клетки черные. На одну из черных клеток поставлена фишка, а некоторая другая черная клетка отмечена. За ход разрешается переместить фишку на соседнюю клетку. Всегда ли можно обойти фишкой все клетки доски, побывав на каждой из них ровно по одному разу, и закончить обход в отмеченной клетке? (Две клетки являются соседними, если имеют общую сторону.)*

Ответ: да.

Решение. Индукцией по n докажем, что для любых двух черных клеток A и B доски $(2n+1) \times (2n+1)$ найдется путь фишки, начинающийся в A, проходящий по всем клеткам доски и заканчивающийся в B.

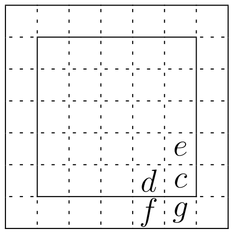
База $n = 1$. Возможны два размещения черных клеток A и B: в соседних угловых клетках и в противоположных угловых клетках. С точностью до поворота доски они разобраны на рисунках.

1	2	3
8	7	4
9	6	5

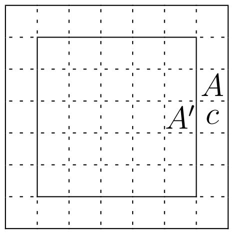
1	2	3
6	5	4
7	8	9

Переход от n к $n+1$.

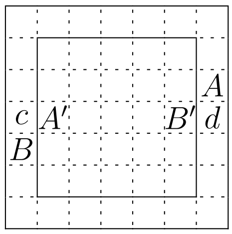
Если клетки A и B можно накрыть доской $(2n+1) \times (2n+1)$, ни один из углов которой не совпадает с углом доски $(2n+3) \times (2n+3)$, то подправим путь фишки из A в B, обходящий доску $(2n+1) \times (2n+1)$, следующим образом. В какой-то момент путь попадет в вершину, помеченную на рисунке буквой c. Тогда с точностью до симметрии фишка шла по маршруту $d \to c \to e$. Перенаправим ее из d в f, затем по часовой стрелке по каемке доски до g и потом в c.



Если так накрыть клетки A и B нельзя, то хотя бы одна из них находится на границе доски $(2n+3)\times(2n+3)$. Пусть для определенности это клетка A (в противном случае A и B можно поменять ролями, рассмотрев обратный путь). Если клетка B расположена не на краю, то сделаем обход таким образом. От клетки A пойдем по каемке против часовой стрелки до клетки c, затем на клетку A' и после этого по маршруту от A' до B, который существует по предположению индукции.



Если же клетка B также расположена на краю, то сделаем обход иначе. Отметим следующую за B по часовой стрелке клетку c и соседнюю с ней черную клетку в квадрате $(2n+1)\times(2n+1)$ — клетку A'. Также отметим следующую за A по часовой стрелке клетку d и соседнюю с ней черную клетку в квадрате $(2n+1)\times(2n+1)$ — клетку B'. Клетки c и d не могут оказаться угловыми, поскольку они белые, а угловые клетки по условию черные. От клетки A пойдем по каемке против часовой стрелки до клетки c, затем на клетку A' и после этого по маршрту от A' до B', потом на d и дальше по каемке до B.



5. *Дан параллелограмм $ABCD$ с углом $\angle B$, равным 60°. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Прямая BO пересекает биссектрису внешнего угла $\angle D$ в точке E. Найдите отношение $\frac{BO}{OE}$.*

Ответ: $1/2$.

Решение. Пусть P — отличная от C точка пересечения описанной окружности треугольника ABC с прямой CD, а F диаметрально противоположная точка для точки B. Тогда $ABCP$ — вписанная трапеция. Значит, она равнобочная и $\angle APD = \angle BAP = \angle ABC = 60^\circ$. Следовательно,

$$\angle PAD = \angle BAD - \angle BAP = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ.$$

Стало быть, $AD = DP$. А поскольку еще и $OA = OP$, прямые AP и OD перпендикулярны. Кроме того, DO — биссектриса угла $\angle ADC$. Тогда DO и DE перпендикулярны как биссектрисы внешнего и внутреннего углов. Пусть Q — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Тогда $AQ = QC$ и, значит, OQ — высота равнобедренного треугольника AOC с углом $120°$. Тогда $\angle OAC = 30°$ и, значит, $OQ = \frac{OA}{2}$. С другой стороны OQ — средняя линия треугольника BDF. Поэтому $OQ = \frac{DF}{2}$ и $DF = OA = OF$. Поскольку треугольник ODE прямоугольный, F — середина его гипотенузы. Таким образом, $OE = 2OF = 2OB$.

6. *Натуральные числа a и b таковы, что $a^3 + b^3 + ab$ делится на $ab(a - b)$. Докажите, что НОК(a, b) является точным квадратом. (НОК — наименьшее общее кратное).*

Решение. Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b. Положим $a = da_1$ и $b = db_1$. Тогда числа a_1 и b_1 взаимно просты, $\text{НОК}(a, b) = da_1b_1$, а делимость $a^3 + b^3 + ab$ на $ab(a - b)$ влечет делимость числа $n = da_1^3 + db_1^3 + a_1b_1$ на $da_1b_1(a_1 - b_1)$ и, в частности, делимость на d. Следовательно, a_1b_1 делится на d. Заметим, что n делится на a_1 и, значит, db_1^3 делится на a_1. Но поскольку числа a_1 и b_1 взаимно просты, d делится на a_1. Аналогично проверяется, что d делится на b_1. Снова используя взаимную простоту чисел a_1 и b_1, получаем, что d делится на a_1b_1. Таким образом, $d = a_1b_1$. Стало быть, $\text{НОК}(a, b) = da_1b_1 = d^2$.

Вариант 5

1. *Дан такой квадратный трехчлен $f(x)$, что уравнение $(f(x))^3 - 4f(x) = 0$ имеет ровно три решения. Сколько решений имеет уравнение $(f(x))^2 = 1$.*

Ответ: 2.

Решение. Предположим, что старший коэффициент трехчлена положителен. Заметим, что $(f(x))^3 - 4f(x) = f(x) \cdot (f(x) - 2) \cdot (f(x) + 2)$. Уравнение $f(x) = 0$ имеет больше корней, чем уравнение $f(x) = -2$, и меньше корней, чем уравнение $f(x) = 2$. Ясно также, что никакие два уравнения не имеют общих корней. Тогда уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно один корень. Следовательно, уравнение $f(x) = 1$ имеет ровно два корня, а уравнение $f(x) = -1$ корней не имеет. Стало быть, уравнение $(f(x))^2 - 1 = (f(x) + 1)(f(x) - 1) = 0$ имеет два корня. Аналогично разбирается и случай, когда старший коэффициент трехчлена отрицателен.

2. *На 2016 карточках написали числа от 1 до 2016 (каждое по одному разу). Затем взяли k карточек. При каком наименьшем k среди них найдутся две карточки с такими числами a и b, что $\left|\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right| < 1$?*

Ответ: 13.

Решение. Покажем, что $k = 13$ подходит. Разобьем числа от 1 до 2016 на 12 групп:

$$
\begin{gathered}
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), \ \ (8, 9, \ldots, 26), \ \ (27, 28, \ldots, 63), \ \ \ldots, \\
(k^3, k^3 + 1, \ldots, (k + 1)^3 - 1), \ \ \ldots, (1728, 1729, \ldots, 2016).
\end{gathered}
$$

Поскольку чисел 13, какие-то два из них (назовем их a и b) окажутся в одной группе. Пусть для определенности $a < b$. Тогда $k^3 \leqslant a < b < (k + 1)^3$ и, следовательно, $0 < \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} < (k + 1) - k = 1$.

Предъявим теперь 12 чисел, все разности между кубическими корнями из которых не меньше 1:

$$1^3, \quad 2^3, \quad 3^3, \quad 4^3, \quad \ldots, \quad 12^3.$$

3. *Вещественные числа x, y и z удовлетворяют условиям $x + y + z = 0$ и $|x| + |y| + |z| \leqslant 1$. Докажите неравенство*

$$x + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} \leqslant \frac{2}{5}\,.$$

Решение. Действительно,

$$5\Big(x + \frac{y}{3} + \frac{z}{5}\Big) = 3(x + y + z) + 2x - \frac{4y}{3} - 2z \leqslant 3(x + y + z) + 2(|x| + |y| + |z|) = 2.$$

4. *Можно ли так расставить в таблице 600×600 числа 1 и -1, что модуль суммы чисел во всей таблице меньше 90 000, а в каждом из прямоугольников 4×6 и 6×4 модуль суммы чисел больше 4?*

Ответ: нет.

Решение. Поскольку сумма чисел в прямоугольнике 4×6 четна, если ее модуль больше четырех, то он хотя бы шесть. Предположим, что такая расстановка нашлась. Заметим, что в ней либо нет ни одной строки, состоящей из одних $+1$, либо нет ни одного столбца, состоящего из одних -1 (если есть и такая строка, и такой столбец, то в их общей клетке с одной стороны должна стоять $+1$, с другой -1). Разберем первый случай (второй разбирается аналогично). Рассмотрим прямоугольник 4×6, расположенный в левом верхнем углу. Модуль суммы чисел в нем хотя бы 6. Сдвинем этот прямоугольник на одну клетку вправо. В нем модуль суммы чисел также хотя бы 6. Поскольку по сравнению с первым прямоугольником у него одна четверка чисел заменена на другую, суммы чисел в прямоугольниках отличаются не более, чем на 8. Но тогда они должны быть одного знака, ибо $+6$ и -6 отличаются больше, чем на 8. Сдвинем прямоугольник еще на одну клетку вправо и снова получим, что сумма чисел в нем того же знака, что и в предыдущем, и т. д.. Таким образом, мы установим, что все суммы чисел в сдвинутых вправо прямоугольниках одного знака. Тогда модуль суммы чисел в четырех верхних строках не меньше, чем $100 \cdot 6 = 600$, поскольку эти строки разбиваются на 100 таких прямоугольников. Аналогичный вывод можно сделать про любые четыре соседние строки.

Рассмотрим четыре верхние строки. Модуль суммы чисел в них не меньше, чем 600. Модуль суммы чисел в строках со второй по пятую также не меньше, чем 600. Эти суммы должны быть одного знака, поскольку в противном случае они различаются не менее, чем на 1200. С другой стороны, они отличаются не больше, чем на разность сумм чисел в первой и пятой строке, которая не больше, чем 1200, причем равенство достигается только тогда, когда в одной из строк стоят исключительно $+1$, что невозможно. Таким образом, сумма чисел в каждых трех строках также одного знака и не меньше 600 по модулю. Следовательно, во всей таблице модуль суммы чисел не меньше, чем $600 \cdot 150 = 90\,000$. Противоречие.

5. *Трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$) вписана в окружность ω. На луче DC за точкой C отмечена такая точка E, что $BC = BE$. Прямая BE вторично пересекает окружность ω в точке F, лежащей вне отрезка BE. Докажите, что центр описанной окружности треугольника CEF лежит на ω.*

Решение. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность ω, значит, она является равнобочной и, в частности, ее диагонали равны. Тогда $AC = BD$ и $\angle BCD = \angle ADC$. Поскольку треугольник BCE равнобедренный,

$$\angle BEC = \angle BCE = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - \angle ADC\,.$$

Следовательно, прямые BE и AD параллельны. Тогда $ADBF$ — вписанная трапеция, значит, она является равнобочной и, в частности, $BD = AF$. Таким образом, $AC = BD = AF$, и точка A лежит на серединном перпендикуляре к CF. Обозначим точку его пересечения с окружностью ω через O. Тогда точки A и O диаметрально противоположны и, значит, $\angle ABO = 90°$. Поскольку треугольник BCE равнобедренный, точка B лежит на серединном перпендикуляре к CE. Но BO перпендикулярно AB, а, значит, и CE. Следовательно, O также лежит на серединном перпендикуляре к CE. Итак, точка O лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам CE и CF. Стало быть, она является центром описанной окружности треугольника CEF.

6. *Целые числа a, b и c удовлетворяют равенству $(a-5)^2+(b-12)^2-(c-13)^2 = a^2+b^2-c^2$. Докажите, что обе части равенства являются точными квадратами.*

Решение. Раскрыв скобки в условии, получим, что $10a + 24b - 26c = 0$. Тогда

$$13^2(a^2 + b^2 - c^2) = (13a)^2 + (13b)^2 - (5a + 12b)^2 = (12a - 5b)^2.$$

Следовательно, $12a - 5b$ делится на 13, т. е. $12a - 5b = 13k$ для некоторого целого k и

$$a^2 + b^2 - c^2 = \frac{(12a - 5b)^2}{13^2} = k^2.$$