Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Задания заключительного этапа

2014/2015 учебный год

Задания для 6-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Первый вариант

1. На острове живут лишь рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. В один прекрасный день 450 островитян сели за круглый стол. Каждый за столом сказал: «Из сидящего справа от меня и сидящего сразу за ним ровно один лжец». Сколько лжецов может сидеть за столом?

2. Значения квадратного трехчлена ax^2+bx+c при всех x отрицательны. Докажите, что $\frac{b}{a} < \frac{c}{a} + 1$.

3. На медиане CM треугольника ABC выбрана точка K. Прямая AK пересекает сторону BC в точке A_1, а прямая BK пересекает сторону AC в точке B_1. Оказалось, что четырехугольник AB_1A_1B вписанный. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

4. Числа a, b и c удовлетворяют условию $a^2bc+ab^2c+abc^2 = 1$. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \sqrt{3}$.

5. Клетки доски 9×9 покрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Сколько способов расставить 9 ладей на одноцветные клетки доски так, чтобы они не били друг друга? (Ладья бьет любую клетку, находящуюся с ней в одной строке или в одном столбце.)

6. Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 3^y = z^2$

Второй вариант

1. На острове живут лишь рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. В один прекрасный день 30 островитян сели за круглый стол. Каждый из них видит всех, за исключением себя и своих соседей. Все сидящие по очереди сказали фразу: «Все, кого я вижу, лжецы». Сколько лжецов сидело за столом?

2. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня. Докажите, что трехчлен $3ax^2 + 2(a+b)x + (b+c)$ также имеет два корня.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Из точки B опустили высоту на AL. Она пересекла сторону AL в точке H, а описанную окружность треугольника ABL в точке K. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой AK.

4. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$1 + \frac{3}{ab+bc+ca} \geqslant \frac{6}{a+b+c}.$$

5. В клетках таблицы $2015 \times n$ так расставлены неотрицательные числа, что в каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы одно положительное число. Известно, что если в клетке стоит положительное число, то сумма всех чисел в одном с ним столбце равна сумме всех чисел в одной с ним строке. При каких n такое возможно?

6. Для каких простых чисел p и q уравнение $p^{2x} + q^{2y} = z^2$ имеет решение в натуральных числах x, y и z?

Третий вариант

1. На острове живут два племени: лжецов, которые всегда лгут, и рыцарей, которые всегда говорят правду. Каждый житель острова дружит со всеми соплеменниками и с некоторыми другими островитянами. Однажды каждый житель острова сказал фразу: «Больше половины моих друзей — соплеменники». Кого на острове больше: рыцарей или лжецов?

2. Ненулевые числа a, b и c таковы, что удвоенные корни квадратного трехчлена x^2+ax+b являются корнями трехчлена $x \; +bx+c$. Чему может равняться отношение a/c?

3. Стороны AB и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ равны. На стороне CD выбрана такая точка K, что $\angle DAK = \angle ABD$. Докажите, что $AK^2 = KD^2 + BC \cdot KD$.

4. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите неравенство $a+b+c \geqslant \frac{3}{abc}$.

5. Сколько способов раскрасить клетки доски 10×10 в синий и зеленый цвета так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было две синие и две зеленые клетки?

6. Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 15^y = z^2$.

Четвертый вариант

1. На острове живут лишь рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, причем как рыцарей, так и лжецов не меньше чем по двое. В один прекрасный день каждый островитян по очереди указал на каждого из остальных и произнес одну из двух фраз: «Ты рыцарь!» или «Ты лжец!». Фраза «Ты лжец!» прозвучала ровно 230 раз. Сколько раз прозвучала фраза «Ты рыцарь!»?

2. Числа a, b, c и d удовлетворяют соотношению $ac = 2b+2d$. Докажите, что хотя бы один из квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$ имеет корень.

3. Центр O окружности, описанной вокруг четырехугольника $ABCD$ лежит на стороне AB. Точка E симметрична D относительно прямой AB. Отрезки AC и DO пересекаются в точке P, а отрезки BD и CE в точке Q. Докажите, что PQ параллельно AB.

4. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $a^2+b^2+c^2 = 1$. Докажите неравенство $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geqslant \sqrt{3}$.

5. В таблице 8×8 расставлены натуральные числа. Числа в клетках, симметричных относительно обеих диагоналей таблицы, равны. Известно, что сумма всех чисел в таблице равна 1000, а сумма чисел на диагоналях равна 200. Для какого наименьшего числа M можно утверждать, что сумма чисел в каждой строке не превосходит M?

6. Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 63^y = z^2$.