Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2014/2015 учебный год

Задания для 10-11 классов

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2014/2015 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) *Длины сторон неравностороннего треугольника оказались последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Знаменатель этой прогрессии может быть равен*
1) 1.7;   2) 0.5;   3) 2.0;   4) другой ответ.

2. (20 баллов) *Отрезок единичной длины разбивается на 3 равных части, и средняя часть выбрасывается. Каждый из оставшихся двух отрезков в свою очередь разделяется на 3 равные части, и его средняя часть также выбрасывается, после чего аналогичная операция проделывается над каждым из оставшихся отрезков и т.д. Предположим, что операция повторена 16 раз. Сколько отрезков длины* $1/3^{16}$ *осталось?*

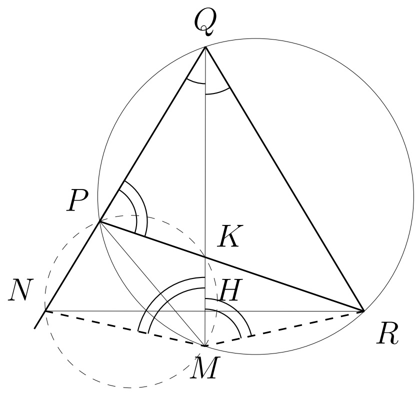
3. (20 баллов) *Правильный треугольник с единичными сторонами разбит тремя прямыми, параллельными его сторонам, на 4 равных треугольника, и средний треугольник выброшен. Каждый из оставшихся трех треугольников в свою очередь разделен тремя прямыми, параллельными его сторонам, на 4 равных части, и его средний треугольник также выброшен, после чего аналогичная операция проделана над каждым из оставшихся треугольников и т.д. Предположим, что операция повторена 12 раз. Сколько правильных треугольников со стороной* $1/2^{12}$ *осталось?*

4. (20 баллов) *Пусть* $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2015}$ *— некая перестановка чисел 2015, 2016, 2017, ..., 4029. Доказать, что произведение* $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \cdot \ldots \cdot (a_{2015} - 2015)$ *равно четному числу.*

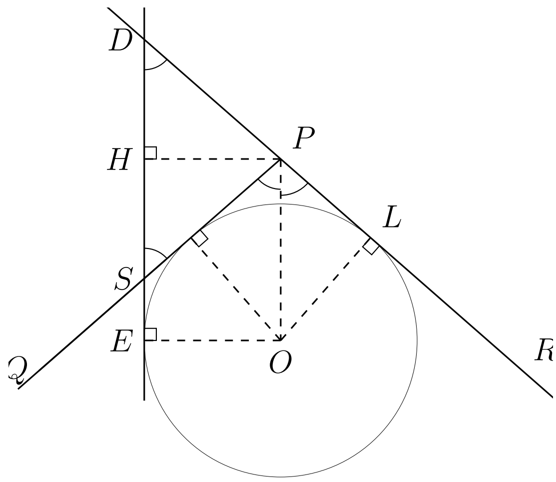
5. (20 баллов) *Докажите, что число* $(1+1/1)\cdot(1+1/3)\cdot(1+1/5)\cdot\ldots\cdot(1+1/2015)$ *не является целым.*

6. (20 баллов) *Прошедшим летом 100 выпускников города N-ска подавали документы в 5 разных вузов нашей страны. Как оказалось, каждый из вузов во время первой и второй волн не смог дозвониться ровно половине из подавших в данный вуз документы выпускников N-ска. В сентябре военкомат сильно заинтересовался теми выпускниками, которым не смогли дозвониться представители хотя бы трех вузов. Какое наибольшее количество выпускников города N-ска могло заинтересовать военкомат?*

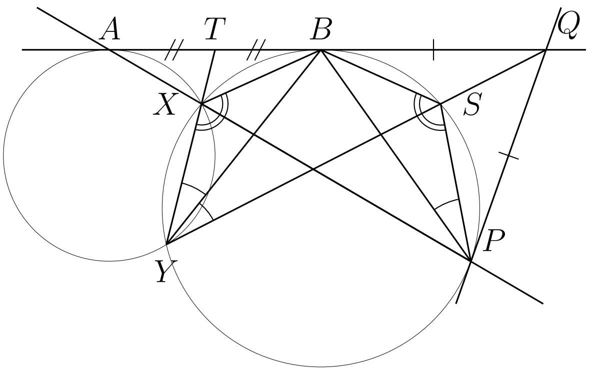
7. (30 баллов) *Биссектриса QK треугольника PQR пересекает его описанную окружность в точке M (отличной от Q). Описанная окружность треугольника PKM пересекает продолжение стороны PQ за точку P в точке N. Докажите, что NR и QM перпендикулярны.*



8. (30 баллов) *Окружность с центром O, вписанная в угол QPR, касается стороны PR в точке L. Касательная к окружности, параллельная PO, пересекает луч PQ в точке S, а луч LP — в точке D. Докажите, что $DS = 2PL$.*



9. (30 баллов) *Окружности K_1 и K_2 касаются одной прямой в точках A и B соответственно и, кроме того, пересекаются в точках X и Y, из которых точка X лежит ближе к прямой AB. Прямая AX вторично пересекает K_2 в точке P. Касательная к K_2 в точке P пересекает прямую AB в точке Q. Докажите, что угол XYB равен углу BYQ.*



10. (40 баллов) *На доске написано 2015 попарно различных положительных вещественных чисел. Оказалось, что для любого числа $a > 0$ количество чисел на доске, меньших $2014/a$, и количество чисел, больших a, имеют одинаковую четность. Чему может быть равно произведение всех чисел?*

Ответ: $2014^{1007}\sqrt{2014}$.

11. (40 баллов) *Для квадратичной функции $p(x) = ax^2 + bx + c$ при некоторых целых n выполняется равенство $p(n) = p(n^2)$. Приведите пример функции $p(x)$, для которой количество таких чисел n наибольшее. Чему равно это наибольшее количество чисел n?*

12. (40 баллов) *Даша, Маша и Саша придумывают в десятичной системе счисления различные пятизначные числа, получающиеся друг из друга перестановкой цифр. Может ли получиться так, что сумма чисел, придуманных Сашей и Машей, будет равняться удвоенному числу, придуманному Дашей?*