Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2014/2015 учебный год

Задания для 6-9 классов

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2014/2015 учебный год

Задания для 6–9 классов

1. (10 баллов) *В таблице* 3×5 *расставили все числа от 1 до 15 так, что сумма чисел в любом столбике из трех клеток делится на 3. Потом некоторые из них стерли и заменили на числа a, b, c:*

11	a	3	8	10
7	9	13	15	12
c	2	5	4	b

Какое из утверждений верно? а) a=1, b=14; б) b=14, c=12; в) a=4, c=6; г) a=14, b=6; е) ни один из вариантов не верен.

Ответ: $a = 1$, $b = 14$.

Решение: Чтобы сумма чисел в каждом столбике делилась на три, необходимо, чтобы 1) c делилось на три; 2) a при делении на три давало остаток 1; 3) b при делении на три давало остаток 2. Отсюда следует, что четвертый вариант ответа не подходит.

По условию, числа в таблице встречаются ровно один раз, следовательно, варианты ответов б) и в) не являются верными, а первый вариант ответа ($a = 1$, $b = 14$) удовлетворяет и этому условию. Таким образом получаем окончательный ответ.

2. (20 баллов) *Сколько существует четных 100-значных чисел, каждая цифра десятичной записи которых равна одной из цифр 0, 1 или 3?*

Ответ: $2 \cdot 3^{98}$.

Решение: По условию число должно быть четным, следовательно, в его младшем разряде может стоять только цифра 0; для сотого разряда имеем два варианта — цифра 1 или цифра 3; для остальных разрядов (со второго по девяносто девятый) — по три варианта — любая из цифр 1, 2, 3. Следовательно, общее количество 100-значных чисел, удовлетворяющих условиям, будет равно $2 \cdot 3^{98} \cdot 1$.

3. (20 баллов) *Сколько чисел из последовательности*

$$20142015, 201402015, 2014002015, 20140002015, 201400002015, \ldots$$

являются полными квадратами?

Ответ: Ни одного.

Решение: Сумма цифр любого числа данной последовательности равна 15. Число 15 делится на 3, но не делится на 9. Следовательно, в последовательности не может быть ни одного полного квадрата.

4. (20 баллов) *Расположите числа Ψ, Ω и Θ в порядке невозрастания, если*

$$\begin{aligned}
\Psi &= \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \ldots - 2012)\,, \\
\Omega &= 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots - 2014\,, \\
\Theta &= 1 - 3 + 5 - 7 + \ldots - 2015\,.
\end{aligned}$$

Ответ: Θ, Ω, Ψ.

Решение:

$$\Psi = \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot 503 = -1006\,,$$
$$\Omega = (-1) \cdot 1007 = -1007\,,$$
$$\Theta = (-2) \cdot 504 = -1008\,.$$

5. (30 баллов) *В королевском трапезном зале три стола, на которые подается три одинаковых пирога. На обед за свой стол король пригласил шестерых принцев. За второй стол можно посадить от 12 до 18 придворных, за третий стол — от 10 до 20 рыцарей. Каждый пирог разрезается на равные куски по количеству* *сидящих за столом. При дворе существует правило — обед рыцаря вместе с обедом придворного равен обеду короля. Определите наибольшее возможное число рыцарей, которых король может позвать в этот день на обед. Сколько придворных при этом сядет за свой стол?*

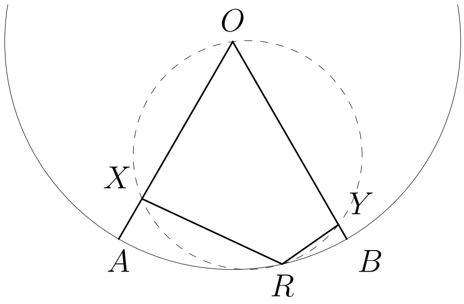
Ответ: И гостей, и придворых в этот день будет по 14 человек.

Первое решение: Пусть число придворных за столом равно a, а число рыцарей — b, тогда обеденное правило запишется как $\frac{1}{a}+ + \frac{1}{b} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{7} - \frac{1}{a}$. Максимизация величины b равносильна минимизации величины $\frac{1}{b}$, что, из обеденного правила, равносильно максимизации величины $\frac{1}{a}$, равносильной минимизации величины a. Таким образом, перебор вариантов надо проводить, начиная с минимально возможного количества придворных.

$$\begin{aligned} a = 12 \Rightarrow b = \frac{7a}{a-7} = \frac{7 \cdot 12}{5} \notin \mathbb{N}, \\ a = 13 \Rightarrow b = \frac{7a}{a-7} = \frac{7 \cdot 13}{6} \notin \mathbb{N}, \\ a = 14 \Rightarrow b = \frac{7a}{a-7} = \frac{7 \cdot 14}{7} = 14. \end{aligned}$$

Второе решение: Пусть число придворных за столом равно a, а число рыцарей — b, тогда обеденное правило запишется как $\frac{1}{a}+ + \frac{1}{b} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow 7(a+b) = ab$. Таким образом, величина ab должна делиться на 7, т.е. одно из чисел a и b должно делиться на 7. Если на 7 делится количество рыцарей, то оно равно 14, так как среди чисел от 10 до 20 на 7 делится только 14. Если же на 7 делится количество придворных, то оно тоже равно 14, так как оно лежит в промежутке от 12 до 18. Таким образом, в любом случае одно из чисел a и b равно 14, а тогда второе тоже равно 14.

6. (40 баллов) *На окружности с центром O взяты точки A и B так, что угол AOB равен $60°$. Из произвольной точки R меньшей дуги AB проведены отрезки RX и RY так, что точка X лежит на отрезке OA и точка Y лежит на отрезке OB. Оказалось, что угол RXO равен $65°$ и угол RYO равен $115°$. Докажите, что длина отрезка XY не зависит от выбора точки R.*

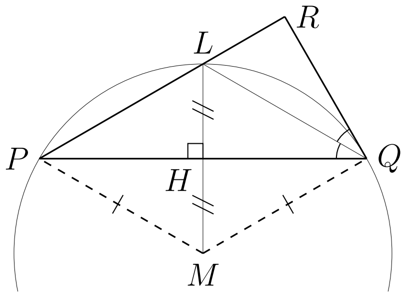


Первое решение: Пусть r_1 — радиус окружности с центром в точке O. Поскольку $\angle RXO + \angle RYO = 180°$, то четырехугольник $RXOY$ является вписанным; обозначим радиус его описанной окружности через r_2. Диагональ OR равна r_1 и стягивает дугу, на которую опирается вписанный угол RXO, равный $65°$. Следовательно, $r_2 = \frac{r_1}{2\sin 65°}$. Диагональ XY стягивает дугу, на которую описается вписанный угол XOY, равный $60°$; отсюда легко получить, что $XY = 2r_2 \sin 60° = \frac{r_1 \sin 60°}{\sin 65°}$. Очевидно, что эта величина никак не зависит от точки R.

Второе решение: Поскольку в четырехугольнике $RXOY$ сумма углов RXO и RYO равна 180 градусам, то вокруг четырехугольника можно описать окружность. Заметим, что в данном четырехугольнике является постоянной длина диагонали RO (для конкретной окружности с центром в точке O), а величины углов заданы по условию и также не зависят от расположения точки R (в том числе и углы, опирающиеся на дуги, стягиваемые хордой RO). Таким образом, радиус описанной вокруг четырехугольника $RXOY$ окружности не зависит от расположения точки R. Следовательно, и длина хорды XY этой окружности, как стягивающая дугу, величина которой задана по условию, не зависит от выбора точки R.

7. (40 баллов) *QL — биссектриса треугольника PQR, а M — центр описанной окружности треугольника PQL. Оказалось, что точки M и L симметричны относительно PQ. Найдите углы треугольника PQL.*

Ответ: $\angle PLQ = 120°$, $\angle LPQ = \angle PQL = 30°$.



Решение: Пусть отрезки ML и PQ пересекаются в точке H. По условию $ML \perp PQ$ и $MH = HL$. Следовательно, прямоугольные треугольники MHP и HPL равны по двум катетам; аналогичным образом равны прямоугольные треугольники MHQ и HQL. Поскольку M — центр описанной вокруг треугольника PQL окружности, то $MP = MQ = ML$. Таким образом, $PL = MP = MQ = QL = ML$, и треугольники MPL и MQL являются равносторонними. Отсюда получаем, что $\angle PLQ = 120°$. Также легко заметить, что треугольник PLQ является равнобедренным, поэтому $\angle QPL = \angle PQL = (180° - \angle PLQ)/2 = 30°$.