Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Задания заключительного этапа

2014/2015 учебный год

Задания для 6-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Первый вариант

1. На острове живут лишь рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. В один прекрасный день 450 островитян сели за круглый стол. Каждый за столом сказал: «Из сидящего справа от меня и сидящего сразу за ним ровно один лжец». Сколько лжецов может сидеть за столом?

Ответ: 150 или 450.

Решение. За столом могут сидеть все лжецы, тогда их 450. Предположим, что за столом есть хотя бы один рыцарь. Тогда есть и рыцарь, справа от которого сидит лжец (иначе они все рыцари, что невозможно). Тогда правый сосед этого лжеца должен быть рыцарем. Но справа от второго рыцаря также обязан сидеть рыцарь, поскольку лжец врет. Второй рыцарь говорит правду, поэтому справа от третьего рыцаря должен сидеть лжец. Рассуждая так далее, мы получим, что все сидящие за столом разбиваются на тройки вида рыцарь, лжец и рыцарь. Поэтому лжецов в точности треть.

2. Значения квадратного трехчлена ax^2+bx+c при всех x отрицательны. Докажите, что $\frac{b}{a} < \frac{c}{a} + 1$.

Решение. Поскольку значения квадратного трехчлена ax^2+bx+c при всех x отрицательны, его старший коэффициент и дискриминант отрицательны: $a < 0$ и $b^2-4ac < 0$. Тогда $c < 0$. Если $b > 0$, то требуемое неравенство очевидно, ибо его левая часть отрицательна, а правая положительна. Пусть $b \leqslant 0$. Тогда проверим неравенство $b > c + a$. Для этого достаточно понять, что $b^2 < (a+c)^2$. Последнее очевидно, поскольку $b^2 < 4ac \leqslant (a+c)^2$.

3. На медиане CM треугольника ABC выбрана точка K. Прямая AK пересекает сторону BC в точке A_1, а прямая BK пересекает сторону AC в точке B_1. Оказалось, что четырехугольник AB_1A_1B вписанный. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

Первое решение. Проведем через точку M прямые MA_2 и MB_2, параллельные AA_1 и BB_1 соответственно. Они будут средними линиями в треугольниках AA_1B и BB_1A. Поэтому A_2 — середина BA_1 и B_2 — середина AB_1. Тогда по теореме Фалеса для параллельных прямых AA_1 и MA_2 и для параллельных прямых BB_1 и MB_2 имеем

$$\frac{BA_1}{2A_1C} = \frac{A_2A_1}{A_1C} = \frac{MK}{KC} = \frac{B_2B_1}{B_1C} = \frac{AB_1}{2B_1C}.$$

Следовательно, прямые AB и A_1B_1 параллельны и, значит, $\angle CA_1B_1 = \angle CBA$. Но из вписанности четырехугольника AB_1A_1B следует, что $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$. Поэтому $\angle CAB = \angle CBA$ и треугольник ABC равнобедренный.

Второе решение. Проведем через точку A_1 прямую, параллельную BC. Пусть она пересекает медиану CM в точке M', а сторону AC в точке B'. Тогда имеем пары подобных треугольников $\triangle ACM \sim \triangle B'CM'$ и

$\triangle BCM \sim \triangle A_1CM'$, причем в этих парах одинаковый коэффициент подобия (он равен $\frac{CM}{CM'}$). Следовательно, $\frac{B'M'}{AM} = \frac{A_1M'}{BM}$ и, значит, $M'B' = A_1M'$. Заметим, что треугольники AMK и $A_1M'K$ подобны по двум углам. Поэтому $\frac{MK}{M'K} = \frac{AM}{M'A_1} = \frac{BM}{B'M'}$. Тогда по отношению сторон и углу подобны треугольники BMK и $B'M'K$. Таким образом, $\angle MKB = \angle M'KB'$, и точки B, K и B' лежат на одной прямой. Следовательно, точки B_1 и B' совпадают. Итак, мы установили, что прямые AB и A_1B_1 параллельны и, значит, $\angle CA_1B_1 = \angle CBA$. Но из вписанности четырехугольника AB_1A_1B следует, что $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$. Поэтому $\angle CAB = \angle CBA$ и треугольник ABC равнобедренный.

Третье решение. По теоремы Чевы

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BM}{MA} = 1.$$

Следовательно, $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{BA_1}{A_1C}$ и, значит,

$$\frac{AC}{B_1C} = \frac{AB_1}{B_1C} + 1 = \frac{BA_1}{A_1C} + 1 = \frac{BC}{A_1C}.$$

Поэтому треугольники ACB и B_1CA_1 подобны. Таким образом, $\angle CA_1B_1 = \angle CBA$. Но из вписанности четырехугольника AB_1A_1B следует, что $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$. Поэтому $\angle CAB = \angle CBA$ и треугольник ABC равнобедренный.

4. Числа a, b и c удовлетворяют условию $a^2bc+ab^2c+abc^2 = 1$. Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2 \geqslant \sqrt{3}$.

Первое решение. Заметим, что $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$. Поэтому достаточно доказать неравенство $(ab+bc+ca)^2 \geqslant 3$. Раскроем скобки и получим, что

$$(ab+bc+ca)^2 = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a^2bc+ab^2c+abc^2) \geqslant$$
$$\geqslant 3(a^2bc+ab^2c+abc^2) = 3.$$

Второе решение. По неравенству $(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+zx)$ имеем $(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$. Поэтому достаточно проверить, что $a^2bc+ab^2c+abc^2 \leqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$. Но это простое следствие неравенства о средних для двух чисел:

$$1 = a^2bc+ab^2c+abc^2 \leqslant a^2 \cdot \frac{b^2+c^2}{2} + b^2 \cdot \frac{c^2+a^2}{2} + c^2 \cdot \frac{a^2+b^2}{2} =$$
$$= a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

5. Клетки доски 9×9 покрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Сколько способов расставить 9 ладей на одноцветные клетки доски так, чтобы они не били друг друга? (Ладья бьет любую клетку, находящуюся с ней в одной строке или в одном столбце.)

Ответ: $4!\,5! = 2\,880$.

Решение. Пусть для определенности левый верхний угол доски покрашен в черный цвет. Заметим, что черные клетки бывают двух типов: клетки, обе координаты которых четные, и клетки, обе координаты которых нечетные. Если ладья стоит на черной клетке с обеими четными координатами, то все черные клетки, которые она бьет, также имеют четные координаты. Аналогично ладья, стоящая на черной клетке с обеими нечетными координатами, бьет лишь черные клетки с обеими нечетными координатами. Поэтому надо посчитать количество способов разместить 9 ладей на двух досках: 4×4 и 5×5 (доске, состоящей лишь из черных клеток с обеими четными координатами, и доске, состоящей лишь из черных клеток с обеими нечетными координатами). Для первой доски это количество равно $4!$, а для второй — $5!$. Следовательно, всего способов размещения ладей на черных клетках $4!\,5! = 2\,880$.

Покажем теперь, что требуемым образом разместить 9 ладей на белых клетках не удастся. Рассмотрим клетки, первая координата которых нечетна, а вторая четна. На таких клетках можно разместить не более четырех ладей, поскольку они содержатся в четырех горизонталях. Аналогично на белых клетках, первая координата которых четна, а вторая нечетна, можно разместить не более четырех ладей, поскольку они содержатся в четырех вертикалях.

6. Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 3^y = z^2$.

Ответ: $(4, 2, 5)$.

Решение. Поскольку левая часть равенства нечетна и не делится на 3, число z также нечетно и не делится на 3. Тогда $z = 6u \pm 1$ и $z^2 = 36u^2 \pm 12u + 1$ и, значит, z^2 дает остаток 1 при делении на 3 и остаток 1 при делении на 4. Заметим, что остатки степеней двойки при делении на 3 чередуются: при нечетных степенях это 2, а при четных — 1. Следовательно, число x четно и, в частности, не меньше двух. Тогда 2^x делится на 4. Заметим, что остатки степеней тройки при делении на 4 также чередуются: при нечетных степенях это 3, а при четных — 1. А поскольку z^2 дает остаток 1 при делении на 4, число y четно. Пусть $x = 2k$ и $y = 2n$. Тогда

$$3^{2n} = z^2 - 2^{2k} = (z - 2^k)(z + 2^k).$$

Произведение чисел $z - 2^k$ и $z + 2^k$ есть степень тройки, поэтому каждое из них также является степенью тройки. Значит, $z - 2^k = 3^a$ и $z + 2^k = 3^b$ для некоторых неотрицательных целых чисел $a < b$. Тогда $3^b - 3^a = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. Правая часть равенства не делится на три, поэтому $a = 0$ и, значит, $b = 2n$. Стало быть, $3^{2n} - 1 = 2^{k+1}$. Таким образом,

$$2^{k+1} = (3^n - 1)(3^n + 1).$$

Поскольку произведение чисел $3^n - 1$ и $3^n + 1$ есть степень двойки, каждое из них также является степенью двойки. Значит, $3^n - 1 = 2^c$ и $3^n + 1 = 2^d$ для некоторых неотрицательных целых чисел $c < d$. Тогда степени двойки 2^c и 2^d отличаются на 2. Стало быть, это 2^1 и 2^2, т. е. $c = 1$ и $d = 2$. Таким образом, $x = 2k = 2(c + d - 1) = 4$ и $y = 2n = 2$. Подставим найденные x и y в левую часть и получим, что $z = 5$.

Второй вариант

1. На острове живут лишь рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. В один прекрасный день 30 островитян сели за круглый стол. Каждый из них видит всех, за исключением себя и своих соседей. Все сидящие по очереди сказали фразу: «Все, кого я вижу, лжецы». Сколько лжецов сидело за столом?

Ответ: 28.

Решение. Не все из сидящих за столом лжецы (иначе они все говорят правду). Поэтому за столом сидит хотя бы один рыцарь. Все, кого он видит, лжецы. Установим, кто его соседи. Оба они лжецами быть не могут (иначе они говорят правду). Также оба они не могут быть рыцарями, поскольку видят друг друга. Следовательно, один из них рыцарь, а другой лжец. Осталось заметить, что ситуация, когда два рыцаря сидят рядом, а все остальные лжецы, возможна.

2. Квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет два корня. Докажите, что трехчлен $3ax^2+2(a+b)x+(b+c)$ также имеет два корня.

Решение. По условию дискриминант первого трехчлена положителен: $b^2-4ac>0$. Рассмотрим дискриминант второго трехчлена:

$$\begin{aligned}4(a+b)^2-4\cdot 3a(b+c)&=4(a^2+2ab+b^2-3ab-3ac)=\\&=4a^2-4ab+4b^2-12ac>4a^2-4ab+b^2=(2a-b)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

Он положителен, следовательно, у второго трехчлена также есть два корня.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Из точки B опустили высоту на AL. Она пересекла сторону AL в точке H, а описанную окружность треугольника ABL в точке K. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой AK.

Решение. Пусть $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$ и O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда $\angle AOB=2\gamma$. Из равнобедренности треугольника AOB имеем $\angle OAB=90^\circ-\gamma$. Для того чтобы доказать, что O лежит на AK достаточно проверить, что угол $\angle KAB$ также равен $90^\circ-\gamma$. Найдем этот угол. Поскольку AL биссектриса, $\angle BAL=\alpha/2$ и $\angle ABK=90^\circ-\alpha/2$. А из вписанности четырехугольника $BAKL$ следует, что

$$\begin{aligned}\angle BAK&=\alpha/2+\angle LAK=\alpha/2+\angle LBK=\\&=\alpha/2+\angle CBA-\angle KBA=\alpha/2+\beta-(90^\circ-\alpha/2)=\\&=\alpha+\beta-90^\circ=90^\circ-\gamma.\end{aligned}$$

4. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$1+\frac{3}{ab+bc+ca}\geqslant\frac{6}{a+b+c}.$$

Решение. Заметим, что $(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)$. Следовательно,

$$1+\frac{3}{ab+bc+ca}\geqslant 1+\frac{9}{(a+b+c)^2}\geqslant 2\frac{3}{a+b+c}=\frac{6}{a+b+c}.$$

В последнем переходе мы воспользовались неравенством о средних для двух чисел.

5. В клетках таблицы $2015\times n$ так расставлены неотрицательные числа, что в каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы одно положительное число. Известно, что если в клетке стоит положительное число, то сумма всех чисел в одном с ним столбце равна сумме всех чисел в одной с ним строке. При каких n такое возможно?

Ответ: $n = 2\,015$.

Решение. Докажем индукцией по $m+n$, что для таблицы $m\times n$ указанная расстановка возможна только при $m = n$. При $m+n = 2$ утверждение очевидно. Рассмотрим таблицу $m \times n$. Пусть сумма чисел в первой строке равна a. Рассмотрим все строки и столбцы, сумма чисел в которых также равна a. Если это вообще все строки и все столбцы, то сумма всех чисел в таблице, посчитанная по строкам, равна ma, а посчитанная по столбцам, равна na. Следовательно, $m = n$. Если же это не все строки и все столбцы, то рассмотрим какую-нибудь строку с другой суммой. Тогда на пересечении этой строки со столбцом с суммой a стоит ноль. Аналогичное заключение верно и для столбца с суммой, отличной от a. Вычеркнем теперь из таблицы все строки и столбцы, сумма чисел в которых отлична от a. После вычеркивания не может получиться нулевых строк и столбцов, поскольку из тех строк и столбцов, которые остались вычеркивались лишь нули. Повторив рассуждение с вычислением суммы чисел в таблице, поймем, что в ней останется одинаковое количество строк и столбцов (пусть и тех, и других по k). Вычеркнем теперь из исходной таблицы все строки и столбцы, сумма чисел в которых равна a. Получим таблицу $(m-k)\times(n-k)$, удовлетворяющую условию задачи. Но тогда по индукционному предположению $m - k = n - k$. Стало быть, $m = n$.

6. Для каких простых чисел p и q уравнение $p^{2x} + q^{2y} = z^2$ имеет решение в натуральных числах x, y и z?

Ответ: $p = 2$, $q = 3$ или $p = 3$ и $q = 2$.

Решение. В силу симметрии можно считать, что $p \leqslant q$. Для $p = 2$ и $q = 3$ уравнение имеет решение в натуральных числах: $2^4 + 3^2 = 5^2$.

Сначала рассмотрим случай $p = q$. Пусть для определенности $x \leqslant y$. Тогда $p^{2x}(p^{2(y-x)}+1) = z^2$. Поэтому z^2 делится на p^{2x} и $z = p^x w$. Сократим обе части на p^{2x} и получим равенство

$$p^{2(y-x)} = w^2 - 1 = (w - 1)(w + 1).$$

Произведение чисел $w - 1$ и $w + 1$ есть степень p, поэтому каждое из них также является степенью p. Значит, $w-1 = p^\alpha$ и $w+1 = p^\beta$ для некоторых неотрицательных целых чисел $\alpha < \beta$. Тогда $p^\alpha+2 = p^\beta$. Причем, поскольку $\alpha+\beta = 2(y-x)$, числа α и β одной четности. Но это невозможно, поскольку $p^\beta \geqslant 4p^\alpha > p^\alpha + 2$.

Перейдем теперь к случаю $p < q$. Заметим, что q нечетно. По условию

$$q^{2y} = z^2 - p^{2x} = (z - p^x)(z + p^x).$$

Произведение чисел $z - p^x$ и $z + p^x$ есть степень q, поэтому каждое из них также является степенью q. Значит, $z - p^x = q^a$ и $z + p^x = q^b$ для некоторых неотрицательных целых чисел $a < b$. Тогда $q^b - q^a = 2 \cdot p^x$. Правая часть равенства не делится на q, поэтому $a = 0$ и, значит, $b = 2y$. Стало быть, $q^{2y} - 1 = 2 \cdot p^x$. Таким образом,

$$2 \cdot p^x = (q^y - 1)(q^y + 1).$$

Заметим, что числа $q^y - 1$ и $q^y + 1$ одной четности и их произведение четно. Поэтому оно делится на 4. Но тогда на 4 делится и $2 \cdot p^x$. Значит, $p = 2$. Следовательно, произведение чисел $q^y - 1$ и $q^y + 1$ есть степень двойки. Тогда каждое из них также является степенью двойки. Значит, $q^y - 1 = 2^c$ и $q^y + 1 = 2^d$ для некоторых неотрицательных целых чисел $c < d$. Тогда степени двойки 2^c и 2^d отличаются на 2. Стало быть, это 2^1 и 2^2, т. е. $q^y = 3$. Таким образом, $q = 3$.

Третий вариант

1. На острове живут два племени: лжецов, которые всегда лгут, и рыцарей, которые всегда говорят правду. Каждый житель острова дружит со всеми соплеменниками и с некоторыми другими островитянами. Однажды каждый житель острова сказал фразу: «Больше половины моих друзей — соплеменники». Кого на острове больше: рыцарей или лжецов?

Ответ: рыцарей.

Решение. Обозначим через r и ℓ количества рыцарей и лжецов. Пусть $r \leqslant \ell$. Тогда каждый рыцарь дружит с $r-1$ рыцарем и, значит, с менее чем $r-1$ лжецом. Следовательно, пар друзей рыцарь–лжец меньше, чем $r(r-1) \leqslant \ell(\ell-1)$. Поскольку каждый лжец дружит с $\ell-1$ лжецом, он дружит не менее чем с ℓ рыцарями. Тогда дружащих пар лжец–рыцарь не менее, чем ℓ^2. Противоречие.

Осталось заметить, что рыцарей может быть больше чем лжецов, например, если все на острове друг с другом дружат, рыцарей r, а лжецов $r-2$.

2. Ненулевые числа a, b и c таковы, что удвоенные корни квадратного трехчлена x^2+ax+b являются корнями трехчлена x^2+bx+c. Чему может равняться отношение a/c?

Ответ: 1/8.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни первого уравнения. Тогда по теореме Виета $a=-x_1-x_2$ и $b=x_1x_2$. А поскольку $2x_1$ и $2x_2$ — корни второго уравнения, $b=-2x_1-2x_2=2a$ и $c=4x_1x_2=4b$. Следовательно, $\frac{a}{c}=\frac{b/2}{4b}=\frac{1}{8}$.

3. Стороны AB и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ равны. На стороне CD выбрана такая точка K, что $\angle DAK=\angle ABD$. Докажите, что $AK^2=KD^2+BC\cdot KD$.

Решение. На продолжении стороны CB за точку B отметим такую точку E, что $BE=DK$. Поскольку четырехугольник $ABCD$ вписанный, $\angle ABE=180^\circ-\angle ABC=\angle ADC$. Треугольники ABE и ADK равны по двум сторонам и углу ($AB=AD$, $\angle ABE=\angle ADC$ и $BE=DK$). Следовательно, $AE=AK$ и $\angle BAE=\angle DAK=\angle ABD$. С другой стороны, $\angle ACB=\angle ADB=\angle ABD$ (углы в первом равенстве опираются на одну дугу, а второе равенство — из равнобедренности треугольника BAD). Таким образом, $\angle BAE=\angle ACB$. Поэтому треугольники CAE и ABE подобны по двум углам и, значит, $\frac{AE}{CE}=\frac{BE}{AE}$. Стало быть, $AK^2=AE^2=BE\cdot CE=KD(BC+KD)$.

4. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Докажите неравенство $a+b+c\geqslant\frac{3}{abc}$.

Решение. По условию

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}.$$

Поэтому достаточно доказать, что $ab+bc+ca\geqslant 3$ при условии, что $a^2bc+ab^2c+abc^2=ab+bc+ca$. По неравенству $(x+y+z)^2\geqslant 3(xy+yz+zx)$

для чисел ab, bc и ca имеем

$$(ab + bc + ca)^2 \geqslant 3(a^2bc + ab^2c + abc^2) = 3(ab + bc + ca).$$

Стало быть, $ab + bc + ca \geqslant 3$.

5. Сколько способов раскрасить клетки доски 10×10 в синий и зеленый цвета так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было две синие и две зеленые клетки?

Ответ: $2^{11} - 2 = 2\,046$.

Решение. Заметим, что если в квадрате 2×2 известны цвета трех клеток, то цвет оставшейся клетки определен однозначно. Также однозначно определены цвета двух оставшихся клеток, если в квадрате 2×2 есть две соседние одноцветные клетки.

Рассмотрим первую строку таблицы. Предположим, что в этой строке нет одноцветных соседних клеток. Тогда цвет первой клетки второй строки однозначно определяет цвета в остальных клетках второй строки: они все либо совпадают с цветами клеток первой строки, либо им противоположны. Поэтому вторую строку можно покрасить двумя способами. Причем в любом из них также нет соседних одноцветных клеток. Аналогично цвет первой клетки третьей строки однозначно определяет ее раскраску. Стало быть, третью строку также можно покрасить двумя способами и т. д.. Следовательно, способов раскрасить таблицу при такой фиксированной первой строке ровно 2^9. А количество способов так покрасить таблицу, что в первой строке нет соседних одноцветных клеток равно 2^{10}.

Предположим, что в первой строке есть две соседние одноцветные клетки. Пусть для определенности они зеленые. Тогда под ними должны быть две синие клетки. Тогда цвета клеток во второй строке определены однозначно. Значит, под двумя соседними синими клетками должны быть две зеленых клетки. Поэтому цвета клеток в третьей строке также определены однозначно и т. д.. Таким образом, первая строка с соседними одноцветными клетками однозначно определяет раскраску всей таблицы. Число способов покрасить первую строку в два цвета равно 2^{10}, но в двух из них нет соседних одноцветных клеток. Поэтому количество раскрасок таблицы с такими первыми строками равно $2^{10} - 2$, а общее число раскрасок равно $2^{10} + (2^{10} - 2) = 2^{11} - 2 = 2\,046$.

6. Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 15^y = z^2$.

Ответ: $(6, 2, 17)$.

Решение. Поскольку левая часть равенства нечетна и не делится на 3, число z также нечетно и не делится на 3. Тогда $z = 6u\pm 1$ и $z^2 = 36u^2\pm 12u+1$ и, значит, z^2 дает остаток 1 при делении на 3 и остаток 1 при делении на 4. Заметим, что остатки степеней двойки при делении на 3 чередуются: при нечетных степенях это 2, а при четных — 1. Следовательно, число x четно и, в частности, не меньше двух. Тогда 2^x делится на 4. Заметим, что остатки степеней 15 при делении на 4 также чередуются: при нечетных степенях это 3, а при четных — 1. А поскольку z^2 дает остаток 1 при делении на 4, число y тоже четно. Пусть $x = 2k$ и $y = 2n$. Тогда

$$2^{2k} = z^2 - 15^{2n} = (z - 15^n)(z + 15^n).$$

Произведение чисел $z-15^n$ и $z+15^n$ есть степень двойки, поэтому каждое из них также является степенью двойки. Значит, $z-15^n = 2^a$ и $z+15^n = 2^b$ для некоторых неотрицательных целых чисел $a < b$. Тогда $2^b - 2^a = 2 \cdot 15^n$ и поэтому $2^{b-1} - 2^{a-1} = 15^n$. Правая часть равенства нечетна, поэтому $a = 1$ и, значит, $b - 1 = 2k$. Стало быть, $2^{2k} - 1 = 15^n$. Таким образом,

$$15^n = (2^k - 1)(2^k + 1).$$

Поскольку числа $2^k - 1$ и $2^k + 1$ взаимно просты (они отличаются на 2 и нечетны) и их произведение есть степень 15, либо $2^k - 1 = 1$ и $2^k + 1 = 15^n$, либо $2^k - 1 = 3^n$ и $2^k + 1 = 5^n$. Первый случай невозможен, а во втором получаем, что $3^n + 2 = 5^n$ и, значит, $n = 1$. Стало быть, $y = 2n = 2$ и $x = 2k = 6$. Подставим найденные x и y в левую часть и получим, что $z = 17$.

Четвертый вариант

1. На острове живут лишь рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, причем как рыцарей, так и лжецов не меньше чем по двое. В один прекрасный день каждый островитян по очереди указал на каждого из остальных и произнес одну из двух фраз: «Ты рыцарь!» или «Ты лжец!». Фраза «Ты лжец!» прозвучала ровно 230 раз. Сколько раз прозвучала фраза «Ты рыцарь!»?

Ответ: 526.

Решение. Обозначим через r и ℓ количества рыцарей и лжецов. Заметим, что рыцарь рыцарю и лжец лжецу говорят: «Ты рыцарь!», — а рыцарь лжецу и лжец рыцарю: «Ты лжец!» Следовательно, число пар лжец–рыцарь равно $\frac{230}{2} = 115 = r\ell$. Поскольку $r\ell = 115 = 5 \cdot 23$ и $r, \ell \geqslant 2$, либо $r = 5$ и $\ell = 23$, либо $r = 23$ и $\ell = 5$. В любом из этих случаев число пар рыцарь–рыцарь и лжец–лжец равно $\frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{23 \cdot 22}{2} = 263$. Стало быть, фраза «Ты рыцарь!» прозвучала 526 раз.

2. Числа a, b, c и d удовлетворяют соотношению $ac = 2b+2d$. Докажите, что хотя бы один из квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$ имеет корень.

Решение. Предположим противное. Тогда дискриминанты обоих квадратных трехчленов отрицательны: $a^2 - 4b < 0$ и $c^2 - 4d < 0$. Следовательно, $a^2 + c^2 < 4b + 4d = 2(2b + 2d) = 2ac$. Но тогда $(a - c)^2 = a^2 - 2ac + c^2 < 0$. Противоречие.

3. Центр O окружности, описанной вокруг четырехугольника $ABCD$ лежит на стороне AB. Точка E симметрична D относительно прямой AB. Отрезки AC и DO пересекаются в точке P, а отрезки BD и CE в точке Q. Докажите, что PQ параллельно AB.

Решение. Поскольку сторона AB проходит через центр окружности, она является ее диаметром. Точки D и E симметричны относительно диаметра, поэтому дуги, стягиваемые отрезками AD и AE равны. Следовательно, $\angle ACD = \angle ACE$. Углы $\angle ABD$ и $\angle ACD$ также равны, поскольку опираются на одну дугу. Наконец, треугольник OBD равнобедренный и, значит, $\angle OBD = \angle ODB$. Соберем вместе все установленные равенства углов:

$$\angle ACE = \angle ACD = \angle ABD = \angle ODB = \varphi.$$

Следовательно, $\angle PDQ = \angle PCQ$ и, значит, четырехугольник $PQCD$ вписанный. Стало быть, $\angle OPQ = \angle QCD = 2\varphi$. Осталось заметить, что $\angle AOD = 2\varphi$ как внешний угол в треугольнике OBD. Следовательно, $\angle AOD = 2\varphi = \angle OPQ$ и прямые AB и PQ параллельны, поскольку накрест лежащие углы равны.

4. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $a^2+b^2+c^2 = 1$. Докажите неравенство $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geqslant \sqrt{3}$.

Решение. Пусть $x = \frac{bc}{a}$, $y = \frac{ca}{b}$ и $z = \frac{ab}{c}$. Тогда $a^2 = yz$, $b^2 = zx$ и $c^2 = xy$. По условию $xy + yz + zx = 1$. Следовательно, $(x + y + z)^2 \geqslant 3(xy + yz + zx) = 3$.

5. В таблице 8×8 расставлены натуральные числа. Числа в клетках, симметричных относительно обеих диагоналей таблицы, равны. Известно, что сумма всех чисел в таблице равна 1000, а сумма чисел на диагоналях равна 200. Для какого наименьшего числа M можно утверждать, что сумма чисел в каждой строке не превосходит M?

Ответ: $M = 288$.

Решение. Рассмотрим верхнюю половину таблицы. Пусть числа в ней расставлены как показано на рисунке. В силу симметрии отмеченные числа полностью определяют расстановку остальных чисел в таблице.

a_1	b_1	b_2	b_3	c_3	c_2	c_1	d_1
	a_2	b_4	b_5	c_5	c_4	d_2	
		a_3	b_6	c_6	d_3		
			a_4	d_4			

Пусть

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \qquad B = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6,$$
$$D = d_1 + d_2 + d_3 + d_4, \qquad C = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6.$$

По условию $2(A+D) = 200$ и $2(A+D)+4(B+C) = 1000$. Поэтому $A+D = 100$ и $B+C = 200$. Поскольку числа натуральные, $a_i+d_j \leqslant A+D-6 = 94$, а сумма каких-то трех чисел b_i и каких-то трех чисел c_j не превосходит $B + C - 6 = 194$. Осталось заметить, что в каждой строке имеется по одному числу вида a_i и d_j, а также по три числа вида b_i и c_j, поэтому их сумма не превосходит $94 + 194 = 288$. Стало быть, $M = 288$ подходит. Покажем, что меньшие M не годятся. Рассмотрим таблицу

47	95	1	1	1	1	95	47
95	1	1	1	1	1	1	95
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
95	1	1	1	1	1	1	95
47	95	1	1	1	1	95	47

Сумма чисел в ней равна $8 \cdot 95 + 4 \cdot 47 + 52 = 1\,000$, на диагоналях — $4 \cdot 47 + 12 = 200$, а в первой строке — $2 \cdot 47 + 2 \cdot 95 + 4 = 288$.

6. Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 63^y = z^2$.

Ответ: $(8, 2, 65)$.

Решение. Поскольку левая часть равенства нечетна и не делится на 3, число z также нечетно и не делится на 3. Тогда $z = 6u \pm 1$ и $z^2 = 36u^2 \pm 12u + 1$ и, значит, z^2 дает остаток 1 при делении на 3 и остаток 1 при делении на 4. Заметим, что остатки степеней двойки при делении на 3 чередуются: при нечетных степенях это 2, а при четных — 1. Следовательно, число x четно и, в частности, не меньше двух. Тогда 2^x делится на 4. Заметим, что остатки степеней 63 при делении на 4 также чередуются: при нечетных степенях это 3, а при четных — 1. А поскольку z^2 дает остаток 1 при делении на 4, число y тоже четно. Пусть $x = 2k$ и $y = 2n$. Тогда

$$2^{2k} = z^2 - 63^{2n} = (z - 63^n)(z + 63^n).$$

Произведение чисел $z - 63^n$ и $z + 63^n$ есть степень двойки, поэтому каждое из них также является степенью двойки. Значит, $z - 63^n = 2^a$ и $z + 63^n = 2^b$ для некоторых неотрицательных целых чисел $a < b$. Тогда $2^b - 2^a = 2 \cdot 63^n$ и поэтому $2^{b-1} - 2^{a-1} = 63^n$. Правая часть равенства нечетна, следовательно, $a = 1$ и, значит, $b - 1 = 2k$. Стало быть, $2^{2k} - 1 = 63^n$. Таким образом,

$$63^n = (2^k - 1)(2^k + 1).$$

Поскольку числа $2^k - 1$ и $2^k + 1$ взаимно просты (они отличаются на 2 и нечетны) и их произведение есть степень 63, либо $2^k - 1 = 1$ и $2^k + 1 = 63^n$, либо $2^k - 1 = 7^n$ и $2^k + 1 = 9^n$. Первый случай невозможен, а во втором получаем, что $7^n + 2 = 9^n$ и, значит, $n = 1$. Стало быть, $y = 2n = 2$ и $x = 2k = 8$. Подставим найденные x и y в левую часть и получим, что $z = 65$.