Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2014/2015 учебный год

Задания для 10-11 классов

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2014/2015 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) *Длины сторон неравностороннего треугольника оказались последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Знаменатель этой прогрессии может быть равен*
1) 1.7;   2) 0.5;   3) 2.0;   4) другой ответ.

Ответ: 4).

Решение: Обозначим стороны треугольника b, qb и q^2b, где q - искомый знаменатель геометрической прогрессии. Для каждой из сторон должно выполняться неравенство треугольника:

$$\begin{cases} b + qb > bq^2 \\ qb + q^2b > b \\ b + q^2b > bq. \end{cases}$$

Отсюда имеем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} q^2 - q - 1 < 0 \\ q^2 + q - 1 > 0 \\ q^2 - q + 1 > 0. \end{cases}$$

Заметим, что последнее неравенство верно при любых значениях знаменателя q. При $q = 2$ не выполняется первое неравенство

$$2^2 - 2 - 1 = 1 < 0.$$

То же самое имеем в случае $q = 1.7$:

$$1.7^2 - 1.7 - 1 = 0.19 < 0.$$

При $q = 0.5$ не выполняется второе неравенство

$$0.5^2 + 0.5 - 1 = -0.25 > 0.$$

Решая совместно первые два неравенства, находим, что искомым знаменателем прогрессии может быть число из интервала

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \simeq (0.618; 1.618).$$

2. (20 баллов) *Отрезок единичной длины разбивается на 3 равных части, и средняя часть выбрасывается. Каждый из оставшихся двух отрезков в свою очередь разделяется на 3 равные части, и его средняя часть также выбрасывается, после чего аналогичная операция проделывается над каждым из оставшихся отрезков и т.д. Предположим, что операция повторена 16 раз. Сколько отрезков длины* $1/3^{16}$ *осталось?*

Ответ: 2^{16}.

Решение: Заметим, что после каждой операции вместо одного исходного отрезка остаются два отрезка, длина каждого из которых равна трети исходного. Таким образом, после каждой операции количество оставшихся отрезков удваивается. Следовательно, после шестнадцати операций останется 2^{16} отрезков, и длина каждого их них будет $1/3^{16}$.

3. (20 баллов) *Правильный треугольник с единичными сторонами разбит тремя прямыми, параллельными его сторонам, на 4 равных треугольника, и средний треугольник выброшен. Каждый из оставшихся трех треугольников в свою очередь разделен тремя прямыми, параллельными его сторонам, на 4 равных части, и его средний треугольник также выброшен, после чего аналогичная операция проделана над каждым из оставшихся треугольников и т.д. Предположим, что операция повторена 12 раз. Сколько правильных треугольников со стороной* $1/2^{12}$ *осталось?*

Ответ: 3^{12}.

Решение: В данном случае после каждой операции количество треугольников утраивается (поскольку один из получившихся при разбиении четырех треугольников выкидывается), причем длины сторон получившихся треугольников в два раза меньше длин сторон исходного треугольника. Следовательно, после двенадцати операций останется 3^{12} правильных треугольников со сторонами $1/2^{12}$.

4. (20 баллов) *Пусть* a_1, a_2, $\ldots$, a_{2015} *— некая перестановка чисел 2015, 2016, 2017, ..., 4029. Доказать, что произведение* $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \cdot \ldots \cdot (a_{2015} - 2015)$ *равно четному числу.*

Решение: Заметим, что среди чисел перестановки, т.е. среди чисел от 2015 до 4029 включительно, нечетных на одно число больше, чем четных. Чтобы рассматриваемое произведение могло быть нечетным числом, необходимо, чтобы нечетными были все множители этого произведения, т.е. из каждого числа перестановки должно вычитаться число другой четности. Однако, среди чисел от 1 до 2015 включительно, которых, очевидно, 2015 штук, также нечетных на одно число больше, чем четных (а не наоборот!). Поэтому, по принципу Дирихле, найдется хотя бы один множитель, являющийся разностью чисел одинаковой четности и, следовательно, являющийся четным.

5. (20 баллов) *Докажите, что число* $(1+1/1)\cdot(1+1/3)\cdot(1+1/5)\cdot\ldots\cdot(1+1/2015)$ *не является целым.*

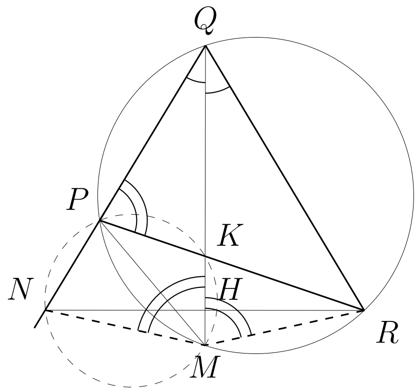
Решение: Приведем выражения в каждой из скобок к общему знаменателю. Получим в числителе произведение четных чисел от 2 до 2016 включительно, а в знаменателе — произведение нечетных чисел от 1 до 2015 включительно. Рассмотрим 2011 — наибольшее простое число из множителей знаменателя. Легко заметить, что оно не входит в разложение на простые сомножители ни одного из множителей числителя. Следовательно, числитель нашей дроби не разделится нацело на знаменатель.

6. (20 баллов) *Прошедшим летом 100 выпускников города N-ска подавали документы в 5 разных вузов нашей страны. Как оказалось, каждый из вузов во время первой и второй волн не смог дозвониться ровно половине из подавших в данный вуз документы выпускников N-ска. В сентябре военкомат сильно заинтересовался теми выпускниками, которым не смогли дозвониться представители хотя бы трех вузов. Какое наибольшее количество выпускников города N-ска могло заинтересовать военкомат?*

Ответ: 83 человека.

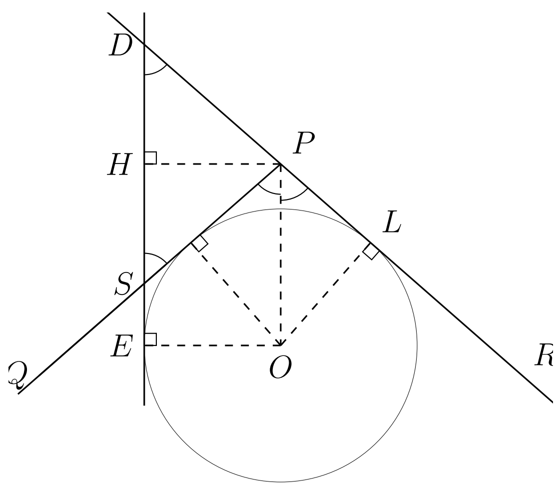
Решение: Так как каждый вуз дозвонился ровно 50 выпускникам, то всего было сделано 250 звонков. Военкомат заинтересовался теми выпускниками, которым поступило 0, 1 или 2 звонка. Пусть таких выпускников было n человек. Тогда каждому из них поступило не более 2 звонков, а остальным $100 - n$ поступило не более 5 звонков. Таким образом всего звонков было сделано не более $2n + 5(100 - n)$, откуда получаем, что $250 \leqslant 2n + 5(100 - n)$, откуда $3n \leqslant 250$. Таким образом $n \leqslant 83$. Осталось привести пример. Обозначим разные вузы буквами A, B, C, D и E. Пусть 17 человек получили звонки от вузов ABCDE, 1 человек — от A, 16 человек — от AB, 17 — от BC, 16 — от CD, 17 — от DE и 16 — от AE. Таким образом, 17 человек получили 5 звонков, один человек — 1 звонок и 82 человека — 2 звонка.

7. (30 баллов) *Биссектриса QK треугольника PQR пересекает его описанную окружность в точке M (отличной от Q). Описанная окружность треугольника PKM пересекает продолжение стороны PQ за точку P в точке N. Докажите, что NR и QM перпендикулярны.*



Решение: Пусть H — точка пересечения NR и QM. Углы QPR и QMR равны как опирающиеся на одну дугу; четырехугольник $NPKM$ является вписанным, поэтому $\angle NPK + \angle NMK = 180°$. Отсюда получаем, что $\angle NMK = \angle KPQ$. Из условия известно, что $\angle PQM = \angle MQR$. Следовательно, треугольники NMQ и RMQ равны по стороне и прилежащим углам. Поэтому QH является биссектрисой равнобедренного треугольника NQR и, таким образом, является и его высотой.

8. (30 баллов) *Окружность с центром O, вписанная в угол QPR, касается стороны PR в точке L. Касательная к окружности, параллельная PO, пересекает луч PQ в точке S, а луч LP — в точке D. Докажите, что $DS = 2PL$.*

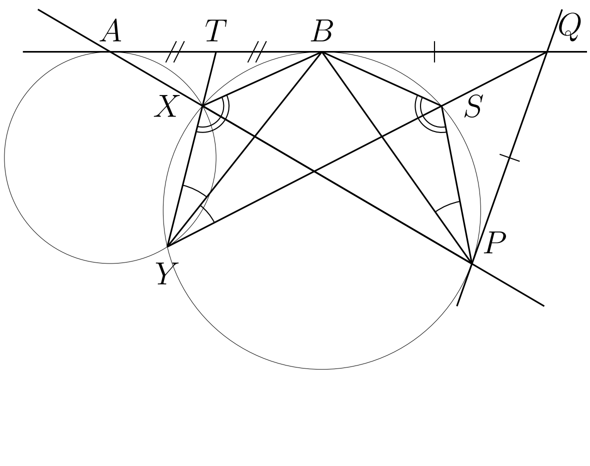


Решение: Пусть касательная к окружности, параллельная PO, касается последней в точке E. Обозначим через H основание перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую DE.

Теперь заметим, что, во-первых, PQ и PR — касательные к окружности с центром в точке O, следовательно, $\angle QPO = \angle OPR$; во-вторых, $PO \| DE$, поэтому $\angle OPR = \angle EDR$ и $\angle DSP = SPO$. Отсюда получаем, что треугольник DPS равнобедренный и тогда PH является медианой и $DS = 2HS$.

Поскольку $PH = OE = OL$, а $\angle PSH = \angle OPL$, то прямоугольные треугольники PHS и POL равны по катету и острому углу. Следовательно, $HS = PL$ и, соответственно, $DS = 2PL$.

9. (30 баллов) *Окружности K_1 и K_2 касаются одной прямой в точках A и B соответственно и, кроме того, пересекаются в точках X и Y, из которых точка X лежит ближе к прямой AB. Прямая AX вторично пересекает K_2 в точке P. Касательная к K_2 в точке P пересекает прямую AB в точке Q. Докажите, что угол XYB равен углу BYQ.*



Решение: Пусть QY пересекает вторую окружность в точке S, а прямая YX пересекает AB в точке T. Из подобия треугольников QSB и QBY имеем $BS : BY = QB : QY$, аналогично $PS : PY = QP : QY$, следовательно $BS : SP = BY : YP$.

По теореме синусов в треугольнике XYB имеем: $BY : XY = \sin\angle BXY : \sin\angle XBY$. Аналогично в треугольнике XYP получаем $PY : XY = \sin\angle PXY : \sin\angle XPY$. Заметим, что углы XPY и XBY равны, как опирающиеся на одну дугу, $\sin\angle PXY = \sin\angle AXT$, $\sin\angle BXY = \sin\angle BXT$. Тогда получаем, что $BS : SP = BY : PY = \sin\angle BXY : \sin\angle PXY = \sin\angle BXT : \sin\angle AXT$. Так как в треугольнике AXB точка T является серединой AB(из подобия $TA^2 = TX \cdot TY$ и аналогично для точки B), то $\sin\angle BXT : \sin\angle AXT = (BT \cdot \sin\angle ABX/TX) : (AT \cdot \sin\angle BAX/TX) = AX : BX$. Заметим теперь, что в треугольниках AXT и BSP равны углы $\angle AXT = \pi - \angle BXP = \angle BSP$ и отношения прилежащих сторон, следовательно они подобны. Откуда получаем, что $\angle BPS = \angle ABX$, и, следовательно, $\angle XYB = \angle ABX = \angle BPS = \angle BYS = \angle BYQ$, что и требовалось доказать.

10. (40 баллов) *На доске написано 2015 попарно различных положительных вещественных чисел. Оказалось, что для любого числа $a > 0$ количество чисел на доске, меньших $2014/a$, и количество чисел, больших a, имеют одинаковую четность. Чему может быть равно произведение всех чисел?*

Ответ: $2014^{1007}\sqrt{2014}$.

Решение: Будем доказывать, что все числа, написанные на доске, кроме одного, разбиваются на пары, произведение в каждой из которых равно 2014. Рассмотрим $a = \sqrt{2014}$. Так как количество чисел больших его и меньших его имеют одинаковую четность, то количество чисел равных ему — нечетно, т.к. 2015 является нечетным числом. Следовательно, в нашем наборе есть хотя бы одно число равное $\sqrt{2014}$, а так как все числа различны, то ровно одно.

Рассмотрим произвольное число b и вместе с ним число $c = 2014/b$. Тогда по условию количества чисел меньших b и больших c одной четности и количества чисел больших b и меньших c одной четности. Тогда количество чисел не равных b (бóльшие + меньшие) имеет такую же четность, что и количество чисел не равных c. Так как всего чисел 2015, то количество чисел равных b и количество чисел равных c имеют одну четность (здесь учтен тот факт, что в наборе обязательно имеется число $\sqrt{2014}$). Таким образом, если число b есть в наборе, то и число $2014/b$ в наборе тоже есть.

Итак мы доказали, что все числа разбиваются на пары с произведением 2014, кроме одного равного $\sqrt{2014}$, откуда легко получаем ответ.

11. (40 баллов) *Для квадратичной функции $p(x) = ax^2 + bx + c$ при некоторых целых n выполняется равенство $p(n) = p(n^2)$. Приведите пример функции $p(x)$, для которой количество таких чисел n наибольшее. Чему равно это наибольшее количество чисел n?*

Ответ: Наибольшее количество чисел n равно 4. Пример функции: $p(x) = x^2 - 6x + 1$.

Решение: Поскольку $0 = 0^2$ и $1 = 1^2$, то для любой функции $p(x)$ существует как минимум два таких числа n.

Запишем равенство $p(n) = p(n^2)$ и преобразуем его:

$$an^2 + bn + c = an^4 + bn^2 + c \Leftrightarrow an^2\left(n^2 - 1\right) = bn(1 - n).$$

Далее, считая, что $n \neq 0$ и $n \neq 1$, получаем, что $b = -an(n + 1)$.

Для каждой функции $p(x)$ значение $-\frac{b}{a}$ известно и фиксированно. Значит, интересующие нас значения n можно получить как решения квадратного уравнения $n^2 + n + \frac{b}{a} = 0$. Его корнями являются $n_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{D}}{2}$, где $D = 1 - 4\frac{b}{a}$. Нетрудно заметить, что корни уравнения будут целыми только в том случае, когда числитель дроби четен, таким образом, дискриминант должен быть точным квадратом некого нечетного числа; и в этом случае мы будем иметь два целых решения уравнения; в остальных случаях целых корней существовать не будет.

Связь между n_1 и n_2 следует из теоремы Виета: $n_1 + n_2 = -1$, т.е. $n_2 = -1 - n_1$.

Таким образом, множество чисел, для которых выполняется условие задачи, — это множество $\{0,\ 1,\ n_1,\ -1-n_1\}$. Теперь выясним, существуют ли такие n_1, что данное множество состоит из четырех чисел. Нетрудно видеть, что должны выполняться условия

$$\begin{cases} n_1 \neq 0, \\ n_1 \neq 1, \\ -1-n_1 \neq 0, \\ -1-n_1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 \neq 0, \\ n_1 \neq 1, \\ n_1 \neq -1, \\ n_1 \neq -2. \end{cases}$$

Очевидно, такие n_1 существуют и, следовательно, наибольшее количество чисел n, для которых выполнено условие задачи, равно 4.

Для построения примера положим $n_1 = 2$, $a = 1$. Получаем, что $n_2 = -1-n_1 = -3$ и $b = -an_1(n_1+1) = -1\cdot 2\cdot 3 = -6$. Пусть $c = 1$. Тогда получаем, что $p(x) = x^2 - 6x + 1$. Проверим: $p(0) = p(0^2) = 1$, $p(1) = p(1^2) = -4$, $p(2) = p(2^2) = -7$, $p(-3) = p\left((-3)^2\right) = 28$.

12. (40 баллов) *Даша, Маша и Саша придумывают в десятичной системе счисления различные пятизначные числа, получающиеся друг из друга перестановкой цифр. Может ли получиться так, что сумма чисел, придуманных Сашей и Машей, будет равняться удвоенному числу, придуманному Дашей?*

Ответ: Да, могло.

Решение: Например, если Даша придумала число 10061, Маша — число 10016, а Саша — число 10106.