

Вариант I

1. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее сумма в шестнадцать раз больше суммы четырех ее первых членов.
2. Решить неравенство $\sqrt{x + \sqrt{2}} + \sqrt{x - \sqrt{2}} < 3\sqrt{2}$.
3. Решить уравнение $\sin 7x - \sin x + \cos^2 2x = \frac{1}{2}$.
4. Решить уравнение $|3 - \log_x 3| + |1 + \log_x 3| = 4$.
5. В прямоугольной трапеции острый угол между диагоналями равен $\arctg 3$ и одна из диагоналей перпендикулярна одной из боковых сторон. Найти отношение длин оснований трапеции.
6. Найти все значения параметра a , при которых разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y = x^3 + ax$ на отрезке $[0, 1]$ равна 4.

Вариант II

1. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее сумма в девять раз больше суммы трех ее первых членов.
2. Решить неравенство $\sqrt{x + \sqrt{3}} + \sqrt{x - \sqrt{3}} < 2\sqrt{3}$.
3. Решить уравнение $\sin 7x + \sin 3x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$.
4. Решить уравнение $|1 - \log_x 2| + |2 + \log_x 2| = 3$.
5. Острый угол прямоугольной трапеции равен углу между диагоналями трапеции и одна из диагоналей перпендикулярна одной из боковых сторон. Найти отношение длин оснований трапеции.
6. Найти все значения параметра a , при которых разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y = x^3 - 2ax$ на отрезке $[0, 1]$ равна 2.

Вариант I

1. В колбе содержится 57%-ный водный раствор соли. После выпаривания 25 г воды раствор стал 76%-ным. Сколько еще надо выпарить воды, чтобы содержание соли в колбе стало равным 95%?
2. Решить неравенство $\sqrt{3x - \sqrt{x - \frac{1}{36}}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.
3. Решить уравнение $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin 3x} - \frac{1}{\sin 2x}$.
4. Решить неравенство $|1 - \log_2(x + 1)| + \log_{\frac{1}{4}} x \leq 0$.
5. Точка M лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC . Найти его площадь, если $AM = 7$, $BM = 4$ и $CM = 7$.
6. При каких значениях параметра a , на координатной плоскости Oxy существует прямая, проходящая через все общие точки графиков функций $y = 5 + (a+1)x - (a+2)x^2$ и $y = 5 - (a+2)x^2 + ax^3 - x^5$?

Вариант II

1. Строительная смесь содержит 30% песка. После добавления в нее 12 кг песка его содержание стало равным 45%. Сколько килограммов песка нужно еще добавить, чтобы песка в смеси стало 60%.
2. Решить неравенство $\sqrt{5x - \sqrt{x - \frac{1}{100}}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$.
3. Решить уравнение $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\cos 3x}$.
4. Решить неравенство $|1 - \log_3(x + 2)| + \log_{\frac{1}{9}} x \leq 0$.
5. Точка N лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC . Найти его площадь, если $AN = 3$, $BN = 7$ и $CN = 6$.
6. При каких значениях параметра a , на координатной плоскости Oxy существует прямая, проходящая через все общие точки графиков функций $y = 3 + ax + (a+1)x^2$ и $y = 3 + (a+1)x^2 + (a-1)x^3 - x^5$?

Вариант I

1. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 45 км выехал велосипедист. Спустя 15 минут из B в A выехал второй велосипедист. Через 1 час 15 минут они встретились. Поболтав полчаса, они продолжили свой путь. Найти скорость первого велосипедиста, если известно, что второй прибыл в A на 15 минут раньше, чем первый в B .
2. Решить уравнение $x + \sqrt{3x^2 + 2} = \sqrt{4 - x^2}$.
3. Решить неравенство $\log_{\sqrt{3x-2}}(2-x) \leq -2 + \log_{2-x}(8x - 3x^2 - 4)$.
4. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y + |4x - |y|| \geq x^2$.
5. Основание H высоты CH треугольника ABC лежит на стороне AB , причем $\angle ACH = \angle BCM$, где CM — медиана треугольника ABC . Найти BC , если $AB = 10$ и $AC = b$. Указать число решений в зависимости от b .
6. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $a \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin x = a$ не имеет решений.

Вариант II

1. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 64 км выехал мотоциклист. Спустя 26 минут из B в A выехал автомобилист. Через 24 минуты они встретились, не останавливаясь, каждый продолжил свой путь. Найти скорость мотоциклиста, если известно, что он прибыл в B на 10 минут раньше, чем автомобилист в A .
2. Решить уравнение $x + \sqrt{2x^2 + 1} = \sqrt{5 - x^2}$.
3. Решить неравенство $\log_{x+1}(1 - 3x) \geq -1 + \log_{\sqrt{1-3x}}(1 - 2x - 3x^2)$.
4. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|3x + |y|| - y \leq x^2$.
5. Основание H высоты CH треугольника ABC лежит на стороне AB , причем $\angle ACH = \angle BCM$, где CM — медиана треугольника ABC . Найти BC , если $AB = c$ и $AC = 6$. Указать число решений в зависимости от c .
6. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $a \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos x = a$ не имеет решений.

Вариант I

1. Даны две прогрессии: арифметическая a_1, a_2, \dots и геометрическая b_1, b_2, \dots . Известно, что $a_5 = b_5$, $a_6 = b_6$, $a_7 + b_4 = 8$ и $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 30$. Найти a_1 .
2. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x+9}}{3-2\sqrt{x}} \leq 1$.
3. Среди корней уравнения $3 \sin 2x + 1 = 3 \sin x + 2 \cos x$ найти тот, для которого функция $y = 2\pi x - 1 - 2x^2$ принимает наибольшее значение.
4. Решить неравенство $\log_2(4x - x^2) \leq \log_x(4x - x^2)$.
5. Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковой стороны BC в точке K . Найти площадь трапеции, если известно, что $AB = a$, $BK = b$ и $CK = c$.
6. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $|ax - 6| = 2 - (a + 2)x$ имеет единственное решение.

Вариант II

1. Даны две прогрессии: арифметическая a_1, a_2, \dots и геометрическая b_1, b_2, \dots . Известно, что $a_6 = b_6$, $a_7 = b_7$, $a_8 + b_5 = 7$ и $a_1 + a_2 + \dots + a_{12} = 36$. Найти a_1 .
2. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x+4}}{2-3\sqrt{x}} \leq 1$.
3. Среди корней уравнения $3 \sin 2x + 1 = 2 \sin x + 3 \cos x$ найти тот, для которого функция $y = 2x^2 - 2\pi x + 1$ принимает наименьшее значение.
4. Решить неравенство $\log_3(3x - x^2) \leq \log_x(3x - x^2)$.
5. Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон BC и AD в точках K и L соответственно. Найти площадь трапеции, если известно, что $AB = a$, $BK = b$ и $DL = d$.
6. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $|5 + ax| = 3 + (a - 2)x$ имеет единственное решение.

Типовые задания по математике

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 1.

- 1) Нарисуйте график функции $y = \arccos(\sqrt{1 - 2x^2})$.
- 2) Вычислите $\sqrt{\underbrace{111\dots1}_{2n \text{ знаков}} - \underbrace{222\dots2}_n \text{ знаков}}$.
- 3) При каких значениях параметра a уравнение $a - x + x^2 = \sqrt{2 + x - x^2}$ не имеет решения?
- 4) Решите уравнение $4 \cos^2 5x + \cos^2 x = 4 \cos 5x \cos^4 x$.
- 5) Решите неравенство $\log_3 \log_{(x-1)^2} \log_{(x-1)^2} (x-1)^6 > 0$.
- 6) Выпуклый четырехугольник вписан в окружность. Найдите сумму произведений противоположных сторон четырехугольника, если его площадь равна S , а угол между диагоналями равен α .
- 7) В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α . Найдите объем шара, вписанного в эту пирамиду, если каждый из двугранных углов при основании равен β .

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 2.

- 1) Нарисуйте график функции $y = \arcsin(\sqrt{1 - 3x^2})$.
- 2) Вычислите $\sqrt{\underbrace{444\dots4}_{2k \text{ знаков}} - \underbrace{888\dots8}_k \text{ знаков}}$.
- 3) При каких значениях параметра b уравнение $b + x + x^2 = \sqrt{6 - x - x^2}$ не имеет решения?
- 4) Решите уравнение $\sin^2 6x + \cos^2 x = 2 \sin 6x \cos^4 x$.
- 5) Решите неравенство $\log_2 \log_{(x-2)^2} \log_{(x-2)^2} (x-2)^{10} > 0$.
- 6) Выпуклый четырехугольник вписан в окружность. Найдите площадь выпуклого четырехугольника, если сумма произведений противоположных сторон четырехугольника равна d , а угол между диагоналями равен β .
- 7) В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α . Найдите радиус шара, вписанного в эту пирамиду, если каждый из двугранных углов при основании равен β .

А.О.Шитов