Заключительный этап 5-8 класса (приведен один из вариантов заданий)

1. Основы логики, моделирование (1 балл)
[Настольные игры]

Как-то четверо мальчиков, живущих на одной улице, договорились собраться вместе и поиграть в настольные игры. Каждый мальчик обещал принести свою настольную игру.

Мальчиков зовут: Петя, Ваня, Тимур и Антон.

Настольные игры у них такие: Уно, Манчкин, Каркасон и Имаджинариум, у каждого мальчика ровно одна игра из перечисленных.

Дома, в которых живут мальчики пронумерованы от 1 до 4, все мальчики живут в разных домах.

Известно:

1. У мальчика из второго дома Уно
2. У Тимура Каркасон
3. Ни Петя, ни Ваня не живут во втором доме
4. У мальчика из четвертого дома Имаджинариум
5. У Вани не Имаджинариум

Так же мальчики не смогли договориться, в чьём доме им лучше собраться, поэтому решили выбрать дом, до которого всем будет ближе, однако знают лишь расстояние между домами. Ближайшим для всех домом является тот дом, для которого максимальное расстояние до других домов является минимальным среди остальных домов.

Вам дана информация о расстоянии между домами, записанная в виде таблицы:

	1	**2**	**3**	**4**
1	0	7	8	6
2	7	0	6	5

3	8	6	0	4
4	6	5	4	0

В такой таблице на пересечении некоторой строки и столбца записывается расстояние между двумя домами.

Помогите мальчикам определиться, где же им играть в настольные игры. В ответе напишите первую букву имени мальчика(заглавную), в чьём доме лучше всего проводить игры. Если существует более одного дома, который подпадает под определение ближайшего, в ответе можно указать первую букву имени мальчика, живущего в любом из таких домов

Ответ: П

Решение:

Для начала найдём номер ближайшего дома, записав максимальное число в каждой строке

	1	**2**	**3**	**4**	**max**
1	0	7	8	6	7
2	7	0	6	5	7
3	8	6	0	4	8
4	6	5	4	0	6

Таким образом дом, для которого наибольшее расстояние до другого дома, является наименьшим среди остальных – дом с номером 4. Осталось только узнать, кто из мальчиков живет в этом доме.

Для этого построим таблицу:

	1	2	3	4	У	М	К	И
П								
В								
Т								
А								
У								
М								
К								
И								

В такой таблице красным отмечены номера домов, желтым – первые буквы имен мальчиков, зеленым – первые буквы названий игр. Будет расставлять + на пересечении соответствующих строк и столбцов, если есть связь. В противном случае ставим -. Согласно условию, все мальчики живут в различных домах и у каждого своя игра.

По пунктам будем заполнять таблицу.

1. У мальчика из второго дома Уно

	1	2	3	4	У	М	К	И
П								
В								
Т								
А								
У	-	+	-	-				
М		-						
К		-						
И		-						

2. У Тимура Каркасон, следовательно, Тимур не из второго дома.

	1	2	3	4	У	М	К	И
П							-	
В							-	
Т		-			-	-	+	-
А							-	

У	-	+	-	-
М		-		
К		-		
И		-		

3. Ни Петя, ни Ваня не живут во втором доме. Следовательно, Антон живет во втором доме. И у Антона Уно.

	1	2	3	4	У	М	К	И
П		-			-		-	
В		-			-		-	
Т		-			-	-	+	-
А	-	+	-	-	+	-	-	-
У	-	+	-	-				
М		-						
К		-						
И		-						

4. У мальчика из четвертого дома Имаджинариум. Следовательно, Тимур не живет в 4 доме.

	1	2	3	4	У	М	К	И
П		-			-		-	
В		-			-		-	
Т		-		-	-	-	+	-
А	-	+	-	-	+	-	-	-
У	-	+	-	-				
М		-		-				
К		-		-				
И	-	-	-	+				

5. У Вани не Имаджинариум. Значит, Имаджинариум у Пети. Тогда у Вани Манчкин. А Петя живет в четвертом доме

	1	2	3	4	У	М	К	И
П	-	-	-	+	-	-	-	+
В		-		-	-	+	-	-
Т		-		-	-	-	+	-
А	-	+	-	-	+	-	-	-
У	-	+	-	-				
М		-		-				
К		-		-				
И	-	-	-	+				

Поскольку Петя живет в четвертом доме, то ответ на поставленную задачу первая буква имени Пети.

2. Моделирование, графы (1 балл) [Вася снова в лабиринте.]

Вася выбрался из предыдущего подземелья, но через некоторое время он снова захотел попробовать свои силы в решение головоломок с лампочками, поэтому отправился в то подземелье вновь, но вот незадача, подземелье изменилось, однако правила остались теми же.

Подземелье состоит из комнат и туннелей между ними. В каждой комнате находится по 4 лампочки. В подземелье есть два типа комнат – красные и зеленые. В зеленых комнатах есть кнопка для включения лампочек, а в красных - нет.

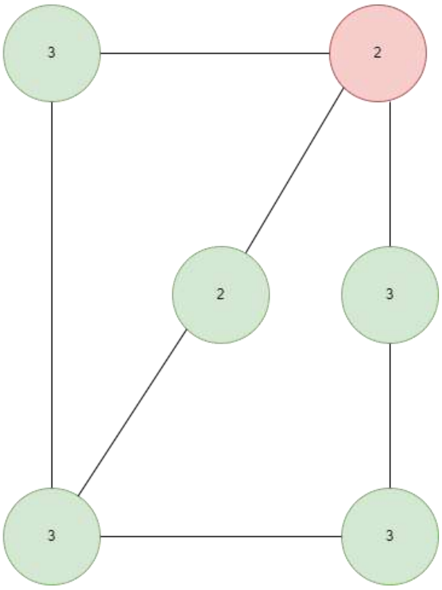
С помощью нажатия на кнопку можно включать лампочки по следующему правилу: одно нажатие на кнопку включает по одной лапочке в текущей комнате и во всех соседних комнатах, если в какой-то комнате уже горят 4 лампочки, то при попытке включить еще одну лампочку в этой комнате потухнут 3 лампочки и останется гореть одна.

Вася может нажимать на кнопки в любом порядке, а также беспрепятственно передвигаться по подземелью и заходить в любую комнату, в том числе начинать с любой комнаты.

Вам дан план подземелья. Комнаты изображены на плане как круги, а число внутри круга – количество горящих лампочек на момент попадания Васи в подземелье. Вася понял, что не может самостоятельно выбраться, поэтому помогите Васе узнать минимальное количество нажатий на кнопки, чтобы в каждой комнате горело ровно по 4 лампочки. Также мальчик пообещал сам себе что, если ему удастся выбраться, он больше не пойдет в это подземелье.

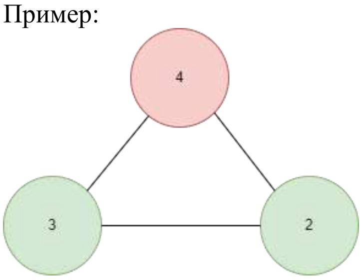
В ответе укажите одно число – минимальное количество нажатий кнопок, чтобы в каждой комнате было зажжено 4 лампочки.

Карта подземелья



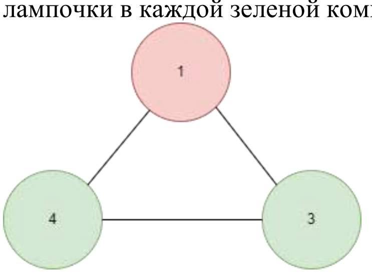
Соседней комнатой называется любая комната, которая соединена туннелем с текущей комнатой.

Пример:



Вася может нажимать кнопки только в зеленых комнатах.

Если Вася нажмет на кнопку в комнате с 3 лампочками, то потухнет 3 лампочки в красной комнате, и загорится по одной лампочки в каждой зеленой комнате.



Ответ: 8

Решение:

Давайте обозначим буквами латинского алфавита количество нажатий на кнопки в комнатах, нумеруя их слева направо и сверху вниз. Так за а возьмем количество нажатий на кнопку в левой верхней комнате, за **b** количество нажатий на кнопку в правой верхней комнате и так далее.

Таким образом можно составить систему уравнений, определяющую количество зажжённых лампочек, зная начальное количество. Чтобы горели все лампочки, нужно чтобы сумма была кратка четырем:

$$\begin{cases} (3 + a + b + e)\ mod\ 4 = 0 \\ (2 + a + b + c + d)\ mod\ 4 = 0 \\ (2 + b + c + e)\ mod\ 4 = 0 \\ (3 + b + d + f)\ mod\ 4 = 0 \\ (3 + a + c + e + f)\ mod\ 4 = 0 \\ (3 + d + e + f)\ mod\ 4 = 0 \end{cases}$$

Из условия известно, что **b=0**, так как комната красная и в ней нет кнопки, чтобы её нажать. Так же можно заметить из данной системы уравнений, что не имеет смысла нажимать на одну и ту же кнопку больше 3 раз.

Давайте избавимся от операции взятия остатка от деления. Для этого можно приравнять выражения в скобках к возможным значениям (справа от равно просто запишем возможные значения суммы через косую черту, учитывая ограничение на переменные от 0 до 3).

$$\begin{cases} 3+a+e=4/8 \\ 2+a+c+d=4/8 \\ 2+c+e=4/8 \\ 3+d+f=4/8 \\ 3+a+c+e+f=4/8/12 \\ 3+d+e+f=4/8 \\ b=0 \end{cases}$$

Оставим в левой части равенства только переменные, в правой только возможные суммы.

$$\begin{cases} a+e=1/5 \\ a+c+d=2/6 \\ c+e=2/6 \\ d+f=1/5 \\ a+c+e+f=1/5/9 \\ d+e+f=1/5 \\ b=0 \end{cases}$$

Начнём решать систему уравнений:

Из 4 и 6 уравнения следует, что e=0/4, но поскольку не имеет смысла количество нажатий больше 3, то **e=0**. Преобразуем систему.

$$\begin{cases} a=1 \\ a+c+d=2/6 \\ c=2 \\ d+f=1/5 \\ a+c+f=1/5/9 \\ e=0 \\ b=0 \end{cases}$$

Получаем уже 4 известных переменных, подставим их в систему:

$$\begin{cases} a=1 \\ 3+d=2/6 \\ c=2 \\ d+f=1/5 \\ 3+f=1/5/9 \\ e=0 \\ b=0 \end{cases}$$

Если в правых частях уравнений 2 и 5 оставить только минимальные возможные значения, то получаем d=3, f=2. Таким образом наше минимальное решение:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=2 \\ d=3 \\ f=2 \\ e=0 \end{cases}$$

Поскольку спрашивалось суммарное количество нажатий, то ответ получаем как 1+2+3+2=8.

3. Кодирование информации, комбинаторика, регулярные выражения (3 балла) [Где взять столько сотрудников?]

Для задания регулярных выражений приняты следующие обозначения:

C	Любой неспециальный символ **c** соответствует самому себе. Специальными символами будем считать только символы **[**, **]**, **{**, **}**, *****, +, -, **?** – эти символы не могут по условию данной задачи встретится в тексте.
[…]	Любой символ из ...; допустимы диапазоны типа: • a-z (последовательно идущие символы в алфавите), • A-Z (последовательно идущие символы в алфавите), • 0-9 (последовательно идущие цифры). Диапазоны могут быть указаны друг за другом.
r*	Ноль или более вхождений символа **r**, может применяться и для диапазонов. Например, **a*** означает ноль или более вхождений символа **a.**
r+	Одно или более вхождений символа r, может применяться и для диапазонов, например **[a-z]+** означает одно или более вхождений символов диапазона **a-z** в любом порядке.

r1r2	За символом или диапазоном **r1** следует символ или диапазон **r2**.
{n}	Число вхождений **n** предыдущего выражения. Например, выражение **[a-z]{3}** соответствует подстроке из трех латинских букв.
{n, m}	Число вхождений от **n** до **m** предыдущего выражения. Например, выражение **[a-z]{3, 5}** соответствует подстроке из не менее трех и не более пяти латинских букв.

В банке все e-mail адреса сотрудников задаются с помощью следующего регулярного выражения
[A-Z].[a-z]{1, 8}@sun.ru

Для каждого отдела банка имеется свой формат e-mail адресов, который не противоречит общебанковскому регулярному выражению для e-mail. У Кирилла свой отдел, сколько сотрудников может быть в его отделе, если у каждого его сотрудника должен быть e-mail, подходящий под регулярное выражение для отдела Кирилла ***[A-E].[a-z]+kir@sun.ru***

В ответе укажите одно число – максимальное количество сотрудников в отделе Кирилла.

Ответ: 61783150

Решение:

Согласно условию, все адреса сотрудников банка задаются с помощью регулярного выражения ***[A-Z].[a-z]{1, 8}@sun.ru***, в отделе Кирилла же адреса e-mail задаются с помощью регулярного выражения ***[A-E].[a-z]+kir@sun.ru***. Чтобы получить регулярное выражение, попадающее под оба вышеуказанных регулярных выражения, нужно разделить их на части и брать их пересечение.

Первая часть – одно вхождение буквы до точки. Вторая часть – подстрока между точкой и символом @.

[A-Z].[a-z]{1, 8}@sun.ru

[A-E].[a-z]+kir@sun.ru

1. [A-E] входит в [A-Z], следовательно их пересечение – [A-E]
2. [a-z]+kir имеет пересечение с [a-z]{1,8} в виде [a-z]{1,5}kir

Таким образом регулярное выражение, полученное из пересечения двух вышеуказанных будет:

[A-E].[a-z]{1,5}kir@sun.ru

Осталось только посчитать количество строк, попадающих под это регулярное выражение. Это будет количество букв в интервале [A-E], домноженное на количество строк, полученных из [a-z]{1,5}. Количество букв в интервале [a-z] равно 26, следовательно для каждой возможной длины строки от 1 до 5 включительно посчитаем количество подходящих строк как 26^n, где n равно длине строки.

Получаем $5 * (26 + 26^2 + 26^3 + 26^4 + 26^5) = 61783150$

4. Системы счисления (2 балла)
[Сложная система]

Найдите такие X, Y, Z при который следующая система будет верной:

$$\begin{cases} A6Z_{16} - 72X_8 = 892_{16} \\ 3XX_4 + 21Y_{16} = 24A_{16} \\ DY0_{16} - 67_8 = DX9_{16} \end{cases}$$

В ответе укажите три числа в десятичной системе счисления через пробел – сначала значение X, затем Y и Z.

Ответ: 1 5 3

Решение:

Приведем систему уравнений к десятичной системе счисления:

$$\begin{cases} 10 * 16^2 + 6 * 16 + Z - 7 * 8^2 - 2 * 8 - X = 8 * 16^2 + 9 * 16 + 2 \\ 3 * 4^2 + X * 4 + X + 2 * 16^2 + 1 * 16 + Y = 2 * 16^2 + 4 * 16 + 10 \\ 13 * 16^2 + Y * 16 + 0 - 6 * 8 - 7 = 13 * 16^2 + X * 16 + 9 \end{cases}$$

Упростим:

$$\begin{cases} Z - X = 2 \\ X * 5 + Y = 10 \\ Y = 4 + X \end{cases}$$

Подставим во второе уравнение Y из третьего уравнения и решим уравнение относительно X, а также выразим Z через X, получим:

$$\begin{cases} Z = 2 + X \\ X = 1 \\ Y = 4 + X \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} X = 1 \\ Y = 5 \\ Z = 3 \end{cases}$$

5. Моделирование. Таблицы и графики (1 балл)
[Выгодное вложение]

У девочки Леры есть 50 монет, на эти деньги она хочет купить несколько акций одной из трех магических компаний. Пророк дал Лере листочек с графиком, на котором указаны цены акций в разные дни для каждой из трех компаний. Лера хочет купить на все деньги акции только одной магической компании в один день, а потом продать их все в другой день. Покупка и продажа осуществляются по цене акции в день покупки и день продажи соответственно. Помогите Лере получить максимальную выгоду.

В ответе укажите одно число – максимальную прибыль, которую получит Лера при продаже акций.

Примечание: прибыль – разница между продажей и покупкой акций.

Ответ: 300

Решение:

Для решения данной задачи нужно для каждой из трех ломанных, соответствующих стоимостям акций компаний, найти наибольшую выгоду, чтобы затем выбрать самую выгодную компанию из трех.

Чтобы найти наибольшую выгоду от купли-продажи акций одной компании, нужно для каждого дня найти день после исследуемого с наибольшей стоимостью акции.

Тогда получаем самые выгодные решения для каждой компании:

Шары и молнии: купить в 2-ой или 3-ий день, продать в 6-ой день. Разница стоимости (выгода от продажи) между этими днями равна 45-10=35, а по стоимости в 10 монет Лера может купить только 5 акций. Таким образом, наибольшая выгода от продажи равна 35*5=**175**.

Книги и сказания: купить в 9-ый день, продать в 10-ый день. Разница стоимости (выгода от продажи) между этими днями равна 35-5=30, а по стоимости в 5 монет Лера может купить 10 акций. Таким образом, наибольшая выгода от продажи равна 30*10=**300**.

Мечи и щиты: купить в 1-ый или 2-ой день, продать в 4-ый или 10-ый день. Разница стоимости (выгода от продажи) между этими днями равна 45-10=35, а по стоимости в 10 монет Лера может купить только 5 акций. Таким образом наибольшая выгода от продажи равна 35*5=**175.**

Отсюда получаем, что выгоднее всего купить в 9-ый день 10 акций компании Книги и сказания, а продать их в 10-ый день. Выгода равна 300 монет.

6. Кодирование информации. Шифрование (3 балла) [Коллизия]

Одной из важных функций для работы со строками является хэш-функция. Хэш-функция позволяет преобразовать строку в число, притом единственным образом, а такое число называется хэшом. В идеальном варианте одному хэшу соответствует только одна строка.

Однако это не всегда так. Коллизией хэшей называется такая ситуация, когда для двух разных строк хэш-функция вычисляет одинаковый хэш.

В данной задаче Вы будете работать с полиномиальной хэш-функцией.

Будем вычислять функцию **h(S)** для исходной строки **S** длиной **n** следующим образом:

Сначала для всех **i** от **0** до **n** не включительно посчитаем значения **S[i]*p**^{i} и сложим их в одно число **A**. В условиях данной задачи будет считать, что строка **S** состоит только из латинских прописных букв, а **S[i]** – номер **i**-ой буквы строки в алфавите. Нумерация символов строки начинается с нуля, нумерация букв алфавита начинается с нуля.

Вычислим значение функции **h(S) =** $\boldsymbol{A \bmod k}$, где ф*ункция A mod B равна остатку от деления A на B.*

Для получения различных хэш-функций константы **p** и **k** задаются как целые положительные числа.

Вам даны две строки: “had” и “ecc”. Найдите такое минимальное целое положительное **p**, что при **k=34** произойдёт коллизия хэшей.

Примечание. Латинский алфавит: ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Ответ: 11

Решение:

Давайте, согласно условию, составим для обоих слов функции, задающие хэш:

1. Для слова “had” получится $(7+0*p+3*p^2)$ mod 34

2. Для слова “ecc” получится $(4+2*p+2*p^2)$ mod 34

Коллизия произойдёт при условии $(7+0*p+3*p^2)$ mod 34 = $(4+2*p+2*p^2)$ mod 34, то есть остатки от деления на 34 будут равны

Иначе говоря, если разница между $\mathbf{7+0*p+3*p^2}$ и $\mathbf{4+2*p+2*p^2}$ будет нацело делиться на 34.

Вычтем вторую функцию из первой, получим: $\mathbf{(3*p^2+0*p+7)}$ – $\mathbf{(2*p^2+2*p+4) = p^2-2p+3}$, данная парабола направлена ветвями вверх и её центр выше оси oX, следовательно разность будет положительна всегда.

Тогда задача сводится к нахождению целого p такого, что $\mathbf{p^2-2p+3 = 34x}$, где x – любое целое неотрицательное число.

При x=0, решения нет

При x=1 и x=2, целочисленного решения нет

При x=3 ответ равен p=-11, p=11. Однако, согласно условию, подходит только положительное p, таким образом ответ равен 11.

7. Алгоритмизация и программирование. Анализ алгоритма (2 балла) [Что такое КМП?]

Вам дан алгоритм:

```
алг Пи функция (арг сим таб S[0:n-1], арг цел n)
нач цел i, j, цел таб P[0:n-1]
        i := 0
        нц пока i < n
                P[i] := 0
                i := i + 1
        кц
        i := 1
        нц пока i < n
                j := P[i - 1]
                нц пока j > 0 И S[i] != S[j]
                        j := P[j – 1]
                кц
                если S[i] = S[j]
                        j := j + 1
                P[i] = j
                Вывод P[i], ‘\n‘
                i := i + 1
        кц
кон
```

На вход алгоритму подали строку S - “abr#abracadabra” и число n – длина строки S.
Ваша задача – найти, сколько раз было выведено число 3.

В ответе укажите одно число.

Ответ: 2

Решение:

На самом деле данный алгоритм – алгоритм нахождения префикс-функции. Префикс-функция является очень распространенным алгоритмом в задачах со строками, а P[i] – не что иное, как наибольшая длина подстроки, заканчивающейся на индексе i, совпадающей с началом строки. При этом P[i] всегда меньше i. *Пояснение: если P[i]>0, то S[0…P[i]-1]=S[i-(P[i]-1)…i]*

Так же есть алгоритм Кнута-Морриса-Пратта, позволяющий найти количество вхождений подстроки S в строке T. Его суть заключается в том, чтобы применить префикс функцию к строке, образованной склейкой строки S и T через символ, не встречающийся ни в одной из этих двух строк (в данной случае символ ‘#’). Тогда количество P[i] равных длине строки S будет равно количеству вхождений подстроки S в строке T.

Чтобы решить данную задачу давайте для каждого этапа цикла по i от 1 до n выпишем P[i], так как можно заметить, что на каждом этапе выполнения цикла изменяется только один элемент массива - P[i], и вычисляется он относительно уже посчитанных значений массива P.

P[0] при этом является начальным значением и равен 0. Составим таблицу, где будем записывать все изменения i и j, а так же соответствующие им S[i] и S[j], которые определяют остановку цикла и значение P[i]:

i	j	S[i]	S[j]	P[i]
1	0	b	a	0
2	0	r	a	0
3	0	#	a	0
4	0	a	a	1
5	1	b	b	2
6	2	r	r	3
7	3	a	#	
7	0	a	a	1
8	1	c	b	
8	0	c	a	0
9	0	a	a	1
10	1	d	b	
10	0	d	a	0
11	0	a	a	1
12	1	b	b	2
13	2	r	r	3
14	3	a	#	
14	0	a	a	1

Получаем в конце выполнения такой массив P:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P	0	0	0	0	1	2	3	1	0	1	0	1	2	3	1

В условии задачи спрашивалось количество выведенных чисел 3, их было выведено ровно 2.

8. Алгебра логики (2 балла)
[Потерявшийся оператор]

Вам дана функция от четырех переменных:

F (A, B, C, D) = (A ↔ B) | (B X C) | (C → D)

Где за **X** скрыта одна из логических операций:

1. | (ИЛИ)
2. & (И)
3. ↔ (ЭКВИВАЛЕНТНО)
4. XOR (НЕ РАВНО, ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ «ИЛИ»: A XOR B = НЕ(A↔B))
5. → (СЛЕДОВАНИЕ: A→B = НЕ A ИЛИ B)
6. ← (ОБРАТНОЕ СЛЕДОВАНИЕ: A←B = A ИЛИ НЕ B)

Какие операции могут быть скрыты за **X** такие, что функция F будет принимать значение «истина» ровно для 15 различных наборов значений аргументов (A,B,C,D)?

В ответе перечислите номера операций в порядке возрастания без пробелов и запятых.

Ответ: 2346

Решение:

Давайте для начала составим часть таблицы истинности:

A	B	C	D	(A ↔ B)	(C → D)
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Две уже известные операции дают истину для 14 наборов аргументов. Операция B X C может дать для общей функции F ещё 0, 1 или 2 набора аргументов, для которых функция будет принимать значение истина. Составим таблицу истинности для B и C на наборах (1,1) и (0,1) – это те наборы, которые выделены желтым в предыдущей таблице истинности. Результаты для остальных наборов в данном случае нам не интересны, так как они не изменят количество наборов аргументов, для которых функция F будет истиной.

B	C	B | C	B & C	B ↔ C	B XOR C	B → C	B ← C
0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1	1

Чтобы функция F приняла значение истина ровно на 15 наборах аргументов, нужно взять функции из таблицы истинности, которые принимают значение истина ровно 1 раз, это функции 2,3,4 и 6

9. Алгоритмизация и программирование. Формальный исполнитель (2 балла) [Затейливая магия]

В волшебном городе Строкалисе живут маги, познающие магию строк. Одно из базовых магических заклинаний преобразует строку таким образом, что каждой букве исходной строки справа приписывается зеркальная ей буква, то есть буква, которая стоит на той же позиции в зеркально отраженном алфавите.

Таким образом для буквы **a** зеркальной буквой является буква **z**, а для буквы **f** – **u**.

Так, если применить данное заклинание к строке 'abc', то она преобразуется в строку 'azbycx'.

Ваша задача, как новичка в Строкалисе, определить, какая буква будет стоять на **300-ой** позиции, если к строке **'sobaka'** применить заклинание последовательно **7 раз**. Нумерация букв в строке начинается с нуля.

В ответе укажите только букву латинского алфавита.

Ответ: y

Решение:

Для решения задачи давайте попробуем вывести формулу для определения буквы, стоящей на позиции n на шаге m. Промоделируем на примере строки 'abc', и попробуем найти закономерность:

На 0 шаге строка равна 'abc', на первом шаге строка равна 'azbycx'. То есть исходные символы перемещаются со своей позиции i на позицию i*2. А в новой строке все буквы, стоящие на позициях i, не кратных 2, это зеркальная буква к той, что стоит на позиции левее, то есть на позиции i-1.

Несложно заметить, что:

Если n не кратно 2, буква на позиции n на шаге m – это зеркальная буква к той букве, которая стоит на позиции (n-1)/2 на шаге m-1

Если n кратно 2, буква на позиции n на шаге m – это буква, которая стоит на позиции n/2 на шаге m-1

Давайте пройдёмся от 300-ой позиции на 7 шаге до соответствующей позиции на шаге 0 (исходная строка), чтобы определить ответ на поставленную задачу. Проходить будем согласно правилам, которые определили выше.

Примечание: зеркальная буква к зеркальной букве – исходная буква.

7 шаг: 300-ая буква

6 шаг: 150-ая буква

5 шаг: 75-ая буква зеркальная к 5 шагу

4 шаг: 37-ая буква зеркальная к 4 шагу

3 шаг: 18-ая буква

2 шаг: 9-ая буква зеркальная к 1 шагу

1 шаг: 4-ая буква

0 шаг: 2 буква

При проходе от 7 шага к 0-ому было три операции «отзеркаливания» буквы, следовательно буква на 300-ой позиции на 7 шаге – зеркальная буква к букве, стоящей на второй позиции в исходной строке. Зеркальная буква для буквы b – y.

10. Комбинаторика (1 балл) [Опять DnD?]

Как-то раз группа друзей собрались поиграть в настольную приключенческую игру Demons&Dwarfs. В этой игре, чтобы сделать какое-либо действие, нужно бросать кубики.

В один из моментов приключения одному из игроков на пути встретился циклоп, и чтобы пройти дальше – нужно было победить его.

Чтобы проверить, попал ли удар по врагу, нужно кинуть D20 кубик; считается, что игрок попал по врагу, если число, описывающее количество **брони врага**, *не больше* числа, выпавшего на кубике. Затем, если удар попал по врагу, то нужно кинуть 4 кубика D4 на атаку, и если сумма на выпавших гранях кубиков *не меньше*, чем число, описывающее **количество жизней врага**, то игрок победил. Таким образом, в зависимости от первого броска, может получиться последовательность из одного или пяти бросков. Даже если меньшего числа кубиков D4 хватает для победы, кинуть нужно все кубики. У кубиков D20 и D4 грани содержат неповторяющиеся числа от 1 до 20 и от 1 до 4 соответственно.

У Циклопа **14 брони** и **9 жизней**.

Сколько различных последовательностей бросков таких, что по итогу бросков кубиков, игрок победит циклопа? В рамках данной задаче полагается, что кубики на урон бросаются одновременно и варианты с одинаковым набором чисел, выпавших на гранях, считаются за один вариант. Например, если на кубиках D4 выпали числа 1,2,3,3, то любые варианты перестановок этих чисел между кубиками не считаются за новый вариант.

Пример: допустим у врага характеристики: 10 брони и 6 жизней

Игрок бросает кубик D20 на проверку попадания, выпадает 12(что больше 10). Следовательно, можно кидать кубики D4 на урон. Затем он кидает 4 кубика D4 на урон, если выпадет сумма больше или равная 6, то он побеждает.

В ответе укажите одно число – количество последовательностей бросков.

Ответ: 168

Решение:

Чтобы посчитать количество различных последовательностей бросков, нужно понимать, что кубики на проверку попадания по врагу и кубики на урон бросаются независимо. Таким образом, общее количество различных последовательностей бросков для того, чтобы победить Циклопа – перемножение количества возможных бросков кубика D20, чтобы выпало не менее 14, и количества возможных наборов бросков четырех кубиков D4 с суммой не меньше 9.

Количество возможных бросков кубика D20, чтобы выпало не менее 14, равно 7.

Посчитаем количество наборов бросков четырех кубиков D4 с суммой не меньше 9. Возможные суммы: 9,10,11,12,13,14,15 и 16

Для 9: (1,1,3,4), (1,2,2,4), (1,2,3,3), (2,2,2,3)

Для 10: (1,1,4,4), (1,2,3,4), (1,3,3,3), (2,2,2,4), (2,2,3,3)

Для 11: (1,2,4,4), (1,3,3,4), (2,2,3,4), (2,3,3,3)

Для 12: (1,3,4,4), (2,2,3,4), (2,3,3,4), (3,3,3,3)

Для 13: (1,4,4,4), (2,3,4,4), (3,3,3,4)

Для 14: (2,4,4,4), (3,3,4,4)

Для 15: (3,4,4,4)

Для 16: (4,4,4,4)

Итого 24 варианта.

Таким образом количество различных последовательностей бросков для того, чтобы победить Циклопа равно 7*24=168