

III. Задания отборочного этапа олимпиады 2020-21 года

Отборочный этап 11 класса. 1 тур (приведен один из вариантов заданий)

1. Кодирование информации. Системы счисления (2 балла)

[Четыре-шестнадцать]

Однажды Петя похвастался Васе, что знает, как связаны между собой четверичная и шестнадцатеричная система счисления. В частности, он заявил, что проанализировал все целые положительные числа, меньшие 4096_{10} , и обнаружил среди них число с максимальной разностью между суммой цифр в записи этого числа в шестнадцатеричной системе счисления и суммой цифр в записи этого числа в четверичной системах счисления. Вася немного подумал и сказал, что такое число не одно. Помогите Пете и определите, сколько существует таких чисел. В ответе укажите целое число.

2. Кодирование информации. Системы счисления (3 балла)

[Две цифры]

Сколько существует целых положительных чисел таких, что их запись в шестнадцатеричной системе счисления оканчивается на две одинаковые цифры, запись не содержит цифр 0, и сумма цифр в записи не превосходит 10_{10} . В ответе укажите целое число.

3. Кодирование информации. Количество информации. Кодирование текста (1 балл)

[Электронный документ]

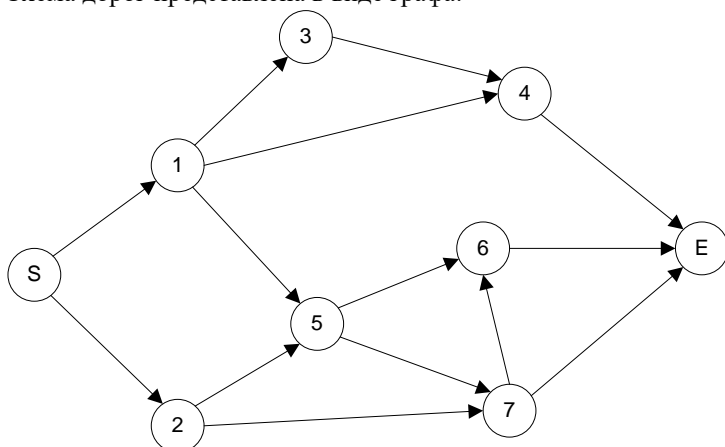
Петя разрабатывает прототип системы электронного документооборота. Он решил не использовать СУБД, а записывать каждый электронный документ в файл, используя собственный формат. Электронный документ состоит из двух частей: аннотации и основной части. Количество символов в аннотации (N) и в основной части (M) Петя хранит отдельно, поэтому в файл он решил записывать только последовательно коды символов сначала аннотации, а потом основной части. Сжимать данные Петя пока не научился, а из всех кодировок прочитал только про двухбайтную кодировку. Эту кодировку он и решил использовать для записи кодов символов, тем более что тексты документов могут содержать символы различных языков. Вася заметил, что по требованиям к системе документооборота в аннотации к документу возможно использовать только ограниченное количество символов, а именно, строчные и прописные буквы латинского и русского алфавитов, арабские цифры и 30 знаков препинания и специальных символов. Вася рассчитал, что если для аннотации хранить коды символов, используя минимальное, одинаковое для всех символов количество бит, а для основной части по-прежнему использовать двухбайтную кодировку, размер файла уменьшится ровно на $1/8$.

Затем Вася проанализировал требования к основной части документа и заметил, что количество символов в алфавите основной части можно уменьшить в 4 раза по отношению к количеству символов в алфавите, которое может быть при двухбайтной кодировке. Тогда Вася предложил еще уменьшить размер файла за счет того, что для основной части хранить коды символов нового алфавита, используя минимальное, одинаковое для всех символов количество бит. В результате расчетов размер нового файла получился на 3584 байт меньше, чем был у исходного файла Пети. Определите количество символов в аннотации (N) и количество символов в основной части (M). В ответе укажите через пробел два целых числа, сначала N , а затем M .

4. Кодирование информации. Количество информации (1 балл)

[Сложная траектория]

Схема дорог представлена в виде графа:



Петя движется из пункта S в пункт E , проходя в процессе через несколько промежуточных пунктов, обозначенных цифрами от 1 до 7. Стрелки указывают возможные направления движения. В каждом промежуточном пункте, из которого исходит более одной стрелки, Петя с равной вероятностью выбирает любой из доступных способов продолжить путь. Есть несколько сообщений:

1. Петя оказался в пункте 5.
2. Петя оказался в пункте 2.
3. Петя оказался в пункте 7.
4. Петя оказался в пункте 4.

5. Петя оказался в пункте 6.

Необходимо упорядочить эти сообщения по возрастанию количества информации в каждом из них. В ответе укажите подряд 5 чисел – номера сообщений в требуемом порядке.

5. Основы логики. Анализ логических функций (3 балла)

[Логическая цепочка]

Вася сконструировал логический преобразователь. На вход преобразователя подается двоичная последовательность длиной в N бит ($N > 3$). На выходе получается одно логическое значение: истина или ложь. Преобразователь работает по следующему алгоритму:

1. Первый бит последовательности считая слева направо принимается за текущий.
2. Берутся последовательно 3 бита, начиная с текущего. Их значения интерпретируются как значения логических переменных A , B и C соответственно. При этом единичное значение первого бита считается за истинное значение переменной A , а нулевое – за ложное. Аналогично для переменных B и C .
3. Вычисляется значение логической функции: $F(A,B,C) = (A \wedge B \rightarrow C) \wedge (\neg(A \vee \neg B) \rightarrow \neg C)$.
4. Если $F(A,B,C)$ приняло ложное значение, алгоритм завершается со значение «ложь» на выходе.
5. Если $F(A,B,C)$ приняло истинное значение, и значение C соответствовало последнему биту последовательности, алгоритм завершается со значение «истина» на выходе.
6. Если $F(A,B,C)$ приняло истинное значение, и значение C было не последним битом последовательности, номер текущего бита увеличивается на единицу и происходит переход на шаг 2.

Вася перепробовал все последовательности длиной N бит и увидел, что только для 611 из них преобразователь получил значение «истина» на выходе. Определите N и запишите в ответ целое число.

6. Основы логики. Упрощение логического выражения (1 балл)

[Цепочка следствий]

Упростите логическое выражение или укажите его результат (при его однозначности). Результат упрощения может содержать только операции инверсии, конъюнкции и дизъюнкции.

$$(((((((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow C) \rightarrow A) \rightarrow D) \rightarrow A) \rightarrow E) \rightarrow A) \rightarrow F$$

Комментарий по вводу ответа: операнды вводятся большими латинскими буквами; логические операции обозначаются, соответственно как **not**, **and** и **or**.

Скобки используются только для изменения порядка выполнения операций. Если порядок выполнения операций очевиден из их приоритетов – дополнительное использование скобок считается ошибкой.

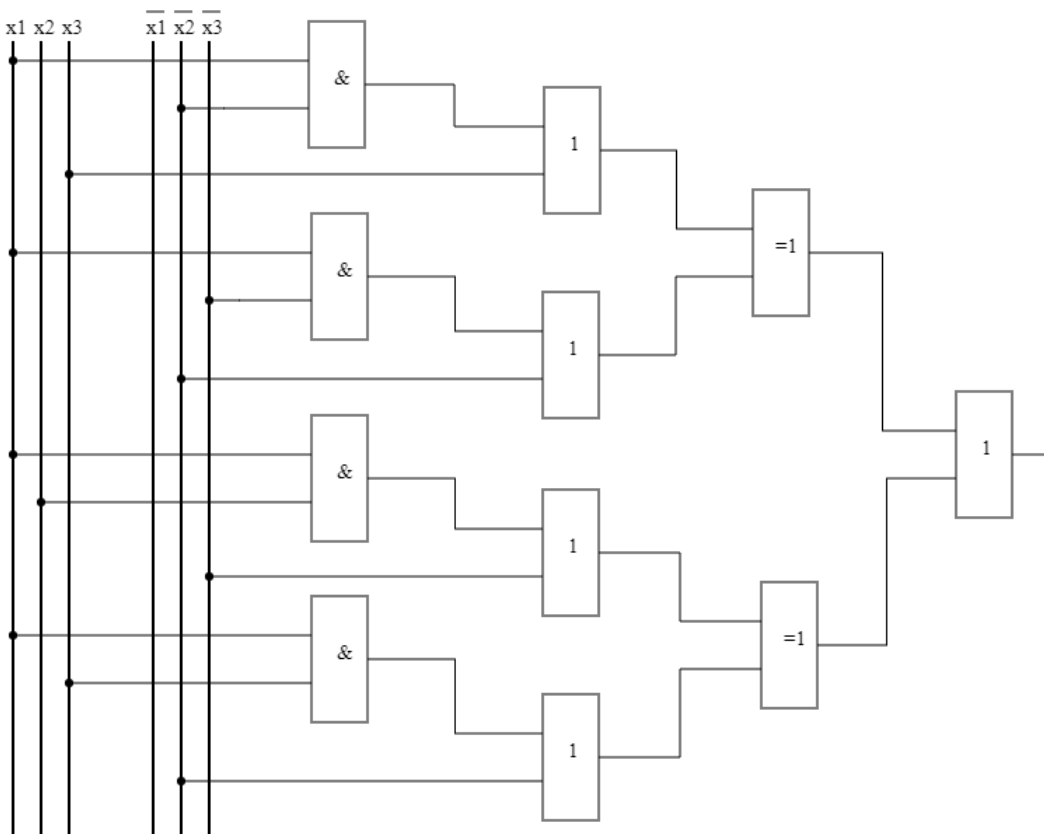
При однозначном ответе – истинный ответ обозначается как 1, а ложный как 0.

Пример записи ответа: $(A \text{ or not } B) \text{ and } C$

7. Основы логики. Синтез выражения по логической схеме (2 балла)

[Три переменных]

Дана схема логической функции $F(x_1, x_2, x_3)$.



Найдите такую комбинацию значений логических переменных x_1 , x_2 и x_3 , при которой на выходе будет получаться значение «ложь». В ответе укажите подряд три значения 0 или 1, соответствующие значениям логических переменных в порядке возрастания их индексов, где 0 означает ложное значение, а 1 – истинное значение. Если таких комбинаций несколько, укажите любую из них. Если таких комбинаций нет, укажите в ответе NULL. Пример записи ответа: 010.

Примечание. На схеме использованы следующие обозначения логических операторов:

Конъюнкция	Дизъюнкция	Исключающее ИЛИ

Входы с горизонтальной чертой над логической переменной означают её инверсию.

8. Алгоритмизация и программирование. Формальный исполнитель (2 балла)

[Калейдоскоп]

Строки обрабатываются в соответствии со следующим алгоритмом:

1. Заменить в строке все символы 'С' на подстроку 'BCB'
2. Заменить в строке все подстроки 'BB' на подстроку 'ABA'
3. Заменить в строке все подстроки 'AA' на подстроку 'ACA'
4. Подсчитать количество символов 'С' в строке. Если оно более 500, завершить исполнение алгоритма, в противном случае перейти на шаг 1.

Пусть исходно была строка 'ABCBA'. Определите символы, которые в строке, получившейся после обработки, находятся на позициях 500, 1001 и 2002. Позиции символов считаются слева направо, начиная с 1. В ответе укажите через пробел три символа: сначала символ на позиции 500, затем символ на позиции 1001 и затем символ на позиции 2002.

9. Алгоритмизация и программирование. Анализ алгоритма (3 балла)

[Спирали]

Петя написал программу, которая по заданному числу N строит квадратную матрицу $N \times N$, заполненную последовательно натуральными числами по спирали по часовой стрелке, начиная с верхнего левого угла. Например, для некоторых значений N его программа вывела такие матрицы:

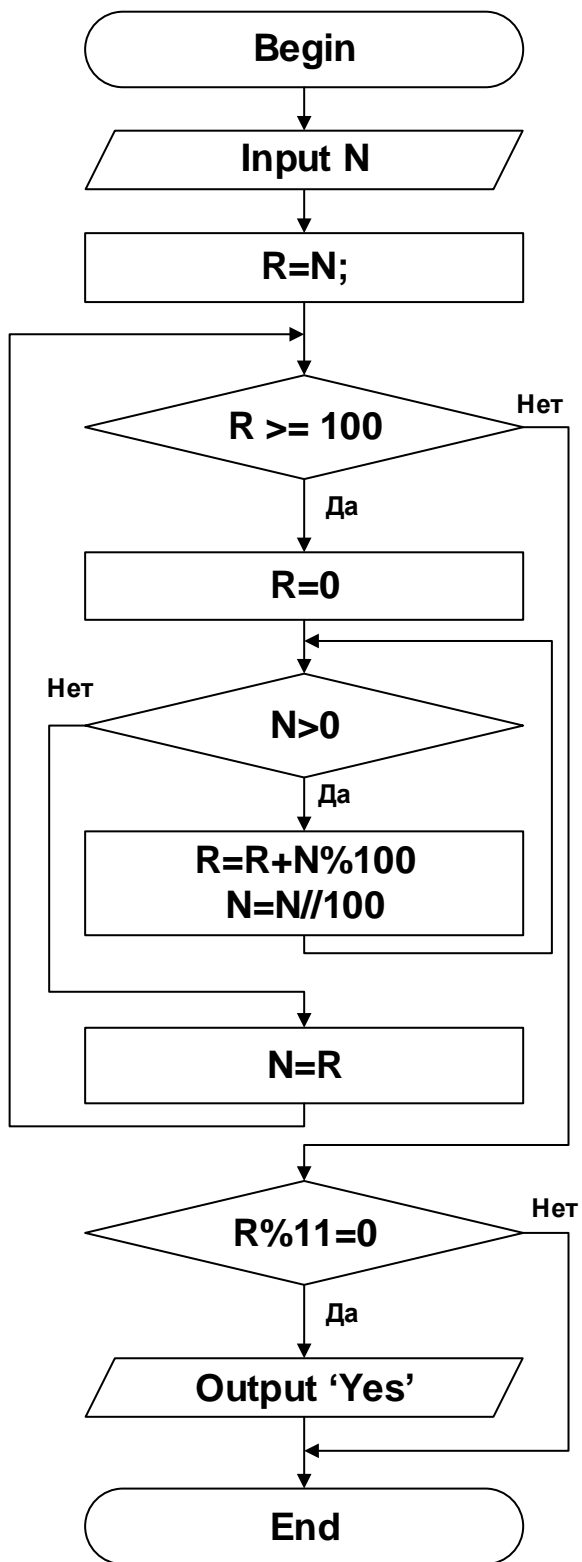
N=4	N=5
1 2 3 4	1 2 3 4 5
12 13 14 5	16 17 18 19 6
11 16 15 6	15 24 25 20 7
10 9 8 7	14 23 22 21 8
	13 12 11 10 9

Вася предложил ввести характеристику R для таких матриц, которая будет равна сумме элементов той строки матрицы, в которой сумма элементов максимальная. Например, для матрицы, построенной при $N=4$, значение R будет равно 48, а при $N=5$ – R примет значение 91. При каком значении N получится значение $R=10581$? В ответе укажите целое число или NULL, если такого значения N не существует.

10. Алгоритмизация и программирование. Блок-схема, анализ алгоритма (2 балла)

[undecim]

Дана блок-схема алгоритма.



Алгоритм был выполнен для всех значений N из диапазона $[1000,1500]$. Для скольких значений в результате его выполнения было выведено слово 'Yes'? В ответе укажите целое число.

Примечание. Операция A/B вычисляет частное от целочисленного деления A на B . Операция $A\%B$ вычисляет остаток от целочисленного деления A на B .