

## Заключительный этап 9 и 10 класса (приведен один из вариантов заданий)

### 1. Кодирование информации и системы счисления (1 балл)

#### [Подбери степень]

Дано выражение  $40_{16}^N - 8_{16}^N - 2_{16}^N = K_2$ . Найдите целое положительное число  $N$ , при котором в двоичной записи числа  $K$  будет ровно семь нулей. В ответе укажите целое число в десятичной системе счисления.

#### Решение:

Преобразуем исходное выражение следующим образом:

$$40_{16}^N - 8_{16}^N - 2_{16}^N = 2^{6N} - 2^{3N} - 2^N = (2^{5N} - 2^{2N} - 1) \cdot 2^N = ((2^{5N} - 1) - 2^{2N}) \cdot 2^N$$

Легко видеть, что число  $(2^{5N} - 1)$  в двоичном представлении состоит из  $5N$  единиц и не содержит ни одного нуля.

Например, при  $N=2$ :

$$2^{5 \cdot 2} = 1000000000_2,$$

$$\begin{array}{r} \_ 1000000000_2 \\ \underline{\hspace{1.5cm} 1_2} \\ 111111111_2 \end{array}$$

Аналогично число  $2^{2N}$  в двоичном представлении выглядит как единица и  $2N$  нулей.

Следовательно, выражение  $(2^{5N} - 1) - 2^{2N}$  состоит из  $5N - 1$  единиц и одного нуля, получаемого за счет вычитания в разряде с номером  $2N$ . Умножение этого значения на  $2^N$  в двоичном представлении добавит в конец числа  $N$  нулей.

Итого, получаем  $1 + N = 7$ . Отсюда  $N = 6$ .

Ответ: 6

### 2. Измерение объема информации (3 балла)

#### [Уменьшение кода]

Для кодирования цветов часто используется RGB-палитра. В этом случае цвет каждого пикселя изображения кодируется с помощью трех отдельных числовых значений, называемыми цветовыми каналами (красный (R), зеленый (G) и синий (B)). Числовое значение по каждому цветовому каналу в общем случае может быть в диапазоне от 0 до 255. При сохранении каждого числового значения в памяти для него отводится минимальное, одинаковое для всех значений количество бит.

Петя проанализировал свой набор изображений и обнаружил, что если взять все возможные цвета, которые встречаются у пикселей этих изображений, то для канала R встречаются только 15 возможных значений, для канала G – 24 возможных значения, а для канала B – 40 возможных значений. Он решил использовать усеченную RGB-палитру, в которой для каждого канала будут возможны только значения, которые он может принимать в имеющемся наборе картинок. При этом он решил кодировать цвет каждого пикселя также тремя отдельными числовыми значениями (R, G и B), но использовать для хранения каждого кода минимальное, но одинаковое для всех кодов по соответствующему каналу количество бит (для хранения кодов разных каналов может использоваться разное количество бит). Вася, посмотрев тот же набор изображений, решил, что можно еще сильнее сократить количество бит, необходимое для кодирования цвета каждого пикселя. Он предложил не использовать три числовых значения для кодирования цвета отдельного пикселя, а каждому уникальному цвету сопоставить отдельный числовой код, и отвести под хранение этих кодов минимальное, одинаковое для всех кодов, количество бит.

Определите, какой выигрыш по памяти из расчета на **один пиксель**, по сравнению с использованием стандартной RGB-палитры (с диапазонами значений от 0 до 255 для каждого из трех каналов), получили ребята. В ответе запишите два целых значения: сначала, на сколько бит меньше, чем при использовании стандартной RGB-палитры, понадобится при способе кодирования Пети, затем, через пробел, на сколько бит меньше, чем при использовании стандартной RGB-палитры, понадобится при способе кодирования Васи.

#### Решение

В задаче рассматривается кодирование значений минимально возможным одинаковым количеством бит, следовательно, количество бит определяется по формуле Хартли: количество бит =  $\text{LOG}_2(\text{количество значений})$ , с округлением до ближайшего большего целого числа.

Тогда, для кодирования цвета одной точки в стандартной RGB-палитре необходимо 24 бита – используется три канала, в каждом из которых может встретиться одно из 256 значений:  $3 \cdot 8 = 24$  бита.

При способе кодирования предложенном Петей необходимо: для красного канала на 15 цветов – 4 бита, для зеленого канала для 24 цветов необходимо 5 бит, для синего канала на 40 цветов потребуется 6 бит. Итого, на каждый пиксель необходимо 15 бит для хранения информации о цвете.

В случае кодирования по методу Васи, необходимо определить максимально возможное количество комбинаций значений по трем каналам –  $15 \cdot 24 \cdot 40 = 14400$ . Для кодирования такого количества возможных значений достаточно 14 бит.

Следовательно, выгода при кодировании по способу Пети  $24 - 15 = 9$  бит, а при кодировании по способу Васи  $24 - 14 = 10$  бит.

Ответ: 9 10 || 9, 10

### 3. Основы логики (2 балла)

#### [Найди корень системы уравнений]

Определите для какого набора значений аргументов A, B, C будет истинной следующая система логических уравнений:

$$\begin{cases} B \text{ and } \bar{C} \text{ or } B \text{ and } A \text{ and } \bar{C} \text{ or } B \text{ and } A = 1 \\ (A \rightarrow B) \rightarrow \bar{C} = 0 \\ \bar{A} \text{ and } \bar{B} \text{ or } C \text{ and } A = 1 \end{cases}$$

Ответ запишите в виде последовательностей нулей и единиц в порядке ABC, где единица обозначает истинность высказывания, а ноль – ложность (например, запись «011» означает, что суждение A – ложно, B – истинно, C – истинно).

**Решение**

Составим таблицы истинности для данной системы уравнений:

A	B	C	$B \text{ and } \bar{C} \text{ or } B \text{ and } A \text{ and } \bar{C} \text{ or } B \text{ and } A$	$(A \rightarrow B) \rightarrow \bar{C}$	$\bar{A} \text{ and } \bar{B} \text{ or } C \text{ and } A$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

В столбцах, соответствующих заданным уравнениям, выделены строки, удовлетворяющие условию.

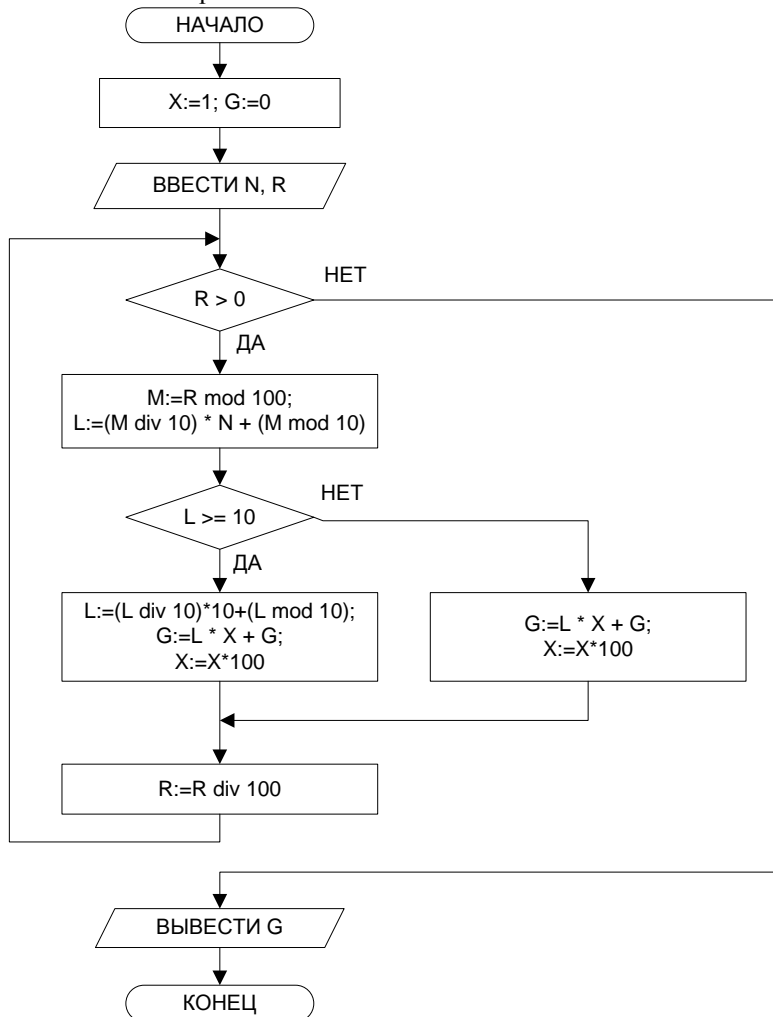
Легко видеть, что только одна строка удовлетворяет сразу всем уравнениям, следовательно, ответом является условие истинности сразу всех аргументов. Формат ввода ответа единица обозначает истинность высказывания, а ноль – ложность, следовательно, ответ необходимо записать как 111.

**Ответ: 111**

**4. Алгоритмизация и программирование (1 балл)**

**[Преобразуй число]**

Дана блок-схема алгоритма:



Пользователь вводит значение двух переменных N и R. При каком значении переменной N для переменной R=123231312, будет получено значение G=131311716. В ответе запишите целое число.

**Решение**

Анализ алгоритма показывает, что происходит последовательное преобразование каждой пары разрядов числа R в пару разрядов числа G, отсчитывая пары справа налево. При этом очевидно, что самой правой паре разрядов числа R соответствует самая правая пара разрядов числа G.

Давайте рассмотрим, что происходит с этой парой разрядов числа R. Пара разрядов имеет значение 12. Цифра 1 умножается на число N и складывается с цифрой 2, результат записывается в переменную L. Легко видеть, что такое преобразование соответствует переводу двухразрядного числа из системы счисления с основанием N в десятичную систему счисления. То есть  $12_N = 16_{10}$ . Тогда очевидно, что  $1 * N + 2 = 16$ , что дает нам значение  $N = 14$ .

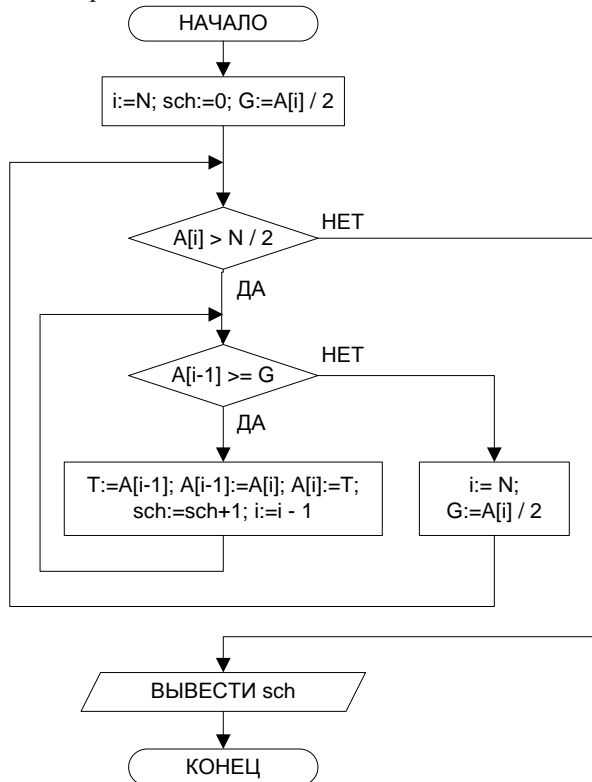
Остальные разряды не нужно переводить, но легко убедиться, что при их переводе сохранится то же значение  $N$ .

Ответ: 14

## 5. Алгоритмизация и программирование (3 балла)

### [Сдвиг массива]

Дана блок-схема алгоритма обработки целочисленного массива длиной  $N$ . Индексация массива начинается с 1. Изначально массив заполнен элементами, значение каждого из которых равно значению его индекса.  $G$  является вещественной переменной.



Чему будет равно значение переменной  $sch$  при  $N$  равном 100. В ответе запишите целое число.

### Решение

Рассмотрим пример с небольшим значением  $N$ , например, равном 6. Начальное состояние массива: 1 2 3 4 5 6

Далее проследим состояние массива, переменной  $sch$  и переменной  $G$ . Можно говорить, что в алгоритме есть два цикла, **внешний** – он определяется изменением значения переменной  $G$  и переходом обратно к последнему к элементу массива, и **внутренний** – перемещение последнего элемента массива на одну позицию, пока он не окажется перед элементом, значение которого меньше в 2 раза.

массив	$sch$	$G$
123456	0	3
126345	3	2,5
125634	6	2
142563	10	1,5

Выполнение алгоритма завершится, так как последний элемент массива стал равным половине длины массива.

Обратим внимание, что первые две итерации **внешнего** цикла дают по три итерации **внутреннего** цикла, что дает увеличение значения переменной  $sch$ , на 3 к каждой итерации, следующая итерация увеличивает значение переменной  $sch$  на 4.

Дальнейший анализ алгоритма показывает, что при увеличении значения переменной  $N$ , количество итераций **внешнего** цикла равно  $N / 2$ . А количество итераций **внутреннего** цикла на первом шаге **внешнего** цикла так же равно  $N / 2$  и увеличивается на единицу после каждой двух итераций **внешнего** цикла.

Тогда для значения переменной  $N$  равной 100, значение переменной  $sch$  можно вычислить, используя формулу суммы арифметической прогрессии:

$$\frac{(50 + 74) * 25}{2} * 2 = 3100$$

Ответ: 3100

## 6. Технологии хранения, поиска и сортировки информации (2 балла)

### [База кадетов]

В базе данных хранятся данные об учениках кадетского корпуса. Для каждого ученика создана запись, в которой, в том числе, хранятся данные о поле кадета (мальчик или девочка), его возрасте (в корпусе учатся дети с 7 до 16 лет), направлении подготовки (медицинское или морское). Известно так же, что на морском направлении подготовки нет кадетов девочек.

Известно количество записей, полученных в ответ на ряд запросов к этой базе:

1. Пол кадета = «мальчик» и направление подготовки = («морское» или «медицинское») и возраст  $\leq 16$  – 315 записей.

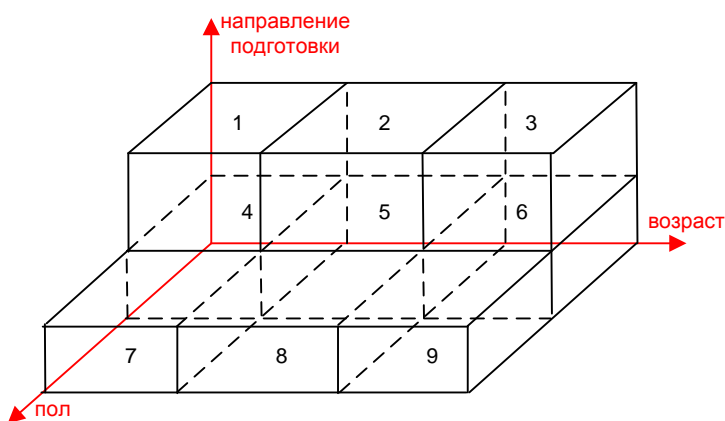
2. Пол кадета = «мальчик» и направление подготовки = «медицинское» и возраст  $\leq 14$  и возраст  $> 10$  – 55 записей.
3. Пол кадета = «мальчик» и направление подготовки = («морское» или «медицинское») и возраст  $\leq 14$  и возраст  $> 10$  – 105 записей.
4. Пол кадета = («мальчик» или «девочка») и направление подготовки = «медицинское» и возраст  $\leq 14$  и возраст  $> 10$  – 95 записей.
5. Пол кадета = («мальчик» или «девочка») и направление подготовки = («морское» или «медицинское») и возраст  $> 10$  – 255 записей.
6. Пол кадета = («мальчик» или «девочка») и направление подготовки = («морское» или «медицинское») и возраст  $\leq 14$  – 330 записей.

Сколько записей будет получено в ответ на запрос: Пол кадета = «девочка» и направление подготовки = «медицинское» и возраст  $\leq 16$ ?

В ответе укажите целое число.

**Решение**

Как видно из запросов, в них участвуют значения трех полей, следовательно, все записи можно представить как области пространства значений полей с заданной на нем декартовой системой координат, где в качестве осей будут выступать поля: «Пол кадета», «Направление подготовки» и «Возраст». Как видно из условия, первые два поля имеют два варианта значения, а поле «Возраст» разделено на три области. При этом указано, что на морском направлении подготовки нет кадетов девочек. Следовательно, любая запись будет принадлежать одной из девяти областей.



Тогда первому запросу соответствуют области 4,5,6,7,8,9.

Второму запросу соответствуют область 5.

Третьему запросу соответствуют области 5,8.

Четвертому запросу соответствуют области 2,5.

Пятому запросу соответствуют области 2,3,5,6,8,9.

Шестому запросу соответствуют области 1,2,4,5,7,8.

А вопросу задачи запросу соответствуют области 1,2,3.

Легко видеть, что области 1,2,3 присутствуют в запросах пять и шесть, а сами запросы пять и шесть позволяют узнать, сколько всего кадетов обучается в корпусе. Задачу усложняет только то, что в этих запросах дублируются области 2,5,8. Количество запросов соответствующих областям 2,5,8 легко получить из запросов два, три и четыре.

Таким образом, третий плюс четвертый минус второй запросы дадут нам количество запросов областей 2,5,8 ( $105+95-55=145$ ).

Тогда, пятый плюс шестой запросы минус результат полученный для областей 2,5,8 ( $255+330-145=440$ ) позволит понять сколько всего было уникальных записей в базе данных.

И, наконец, результат будет получен в результате вычитания из всего количества записей в базе количества записей соответствующего первому запросу ( $440-315=125$ ).

**Ответ: 125**

**7. Технологии обработки информации в электронных таблицах (2 балла)**

**[Остатки]**

Дана таблица в режиме отображения формул:

	A	B	C	D	E
1	5	4	3		15
2	=A1+E\$1/25	=B1+4/16*E\$1	=C1+(E\$1/40)	=СУММ(A2:C2)	

Формулу из ячейки A2 скопировали во все ячейки диапазона A3:A1024, формулу из ячейки B2 скопировали во все ячейки диапазона B3:B1024, формулу из ячейки C2 скопировали во все ячейки диапазона C3:C1024, а формулу из ячейки D2 скопировали во все ячейки диапазона D3:D1024.

Определите, сколько раз в диапазоне ячеек D2:D1024 будет получено целое значение.

**Решение**

Из анализа формул, представленных в ячейках A2, B2, C2 видно, что все три столбца представляют собой арифметические прогрессии с разным шагом. В столбце D представлена сумма ячеек A:C соответствующей строки.

Тогда сумма любой строки равна:  $\frac{15}{25} * N + \frac{15}{4} * N + \frac{15}{40} * N = \frac{189}{40} * N$ , где  $N$  - это порядковый номер строки.

Очевидно, что сумма будет целой для  $N$  кратных сорока.

Всего в первых 1024 строках таких строк будет 25.

**Ответ: 25**

## 8. Телекоммуникационные технологии (1 балл)

### [Разделение сетей]

Маска сети для IPv4 адресации – это 4-х байтное число, которое делит IP адрес на *адрес сети* (первая часть) и *адрес узла* (вторая часть). У всех адресов одной IP-сети совпадают первые части и отличаются вторые. Для части IP-адреса, соответствующей адресу сети, в маске сети содержатся двоичные единицы, а для части IP-адреса, соответствующей адресу узла, в маске сети содержатся двоичные нули. Для записи масок сетей часто используется нотация, когда после IP-адреса через «/» указывается число бит, отводимых в маске под адрес сети. Например, для адреса 11.12.0.8 и маски 255.0.0.0 запись будет иметь следующий вид 11.12.0.8/8.

В организации есть локальная IP-сеть. Одному из узлов в этой сети назначен следующий IP-адрес: 172.16.170.28/26. Администратору сети поставили задачу организовать в рамках этой локальной сети две изолированных на канальном уровне подсети, соединенные через маршрутизацию, таким образом, чтобы в первой из них (подсеть А) было 30 устройств, а во второй (подсеть В) 13.

Администратор назначил для подсети А следующие значения адреса сети и маски: 172.16.170.32/27. Помогите Администратору назначить для подсети В такие значения адреса сети и маски, что:

1. В сети будет минимально возможное количество IP-адресов, но достаточное для подключения требуемого по условию количества устройств.

2. Если существует несколько возможных значений адреса сети, удовлетворяющих предыдущему пункту, то необходимо выбрать тот, у которого будет меньшее значение последнего байта адреса сети.

В ответе запишите адрес сети, в приведенном в задаче формате (например, 11.12.0.128/26). Если невозможно разделить исходную сеть на подсети в соответствии с заданными условиями, то в ответе укажите NULL.

**Решение:**

Для решения задачи переведем десятичное представление IP-адреса и маски в двоичное:

172.16.170.28/26

IP адрес: 10101100.00010000.10101010.00011100

Маска: 11111111.11111111.11111111.11000000

Таким образом, видно, что для всей локальной сети IP-адресом сети является: 172.168.170.0, а максимально возможное количество подключаемых к этой сети устройств равно 62.

Администратору необходимо подключить суммарно 43 устройства, что допустимо в данной конфигурации.

Он назначил первой сети IP-адрес сети: 172.16.170.32/27, представим его для удобства в двоичном виде:

IP адрес: 10101100.00010000.10101010.00100000

Маска: 11111111.11111111.11111111.11100000

Для организации изолированной на канальном уровне второй сети необходимо, чтобы ее IP-адрес сети отличался от уже существующей. А для подключения 13 устройств достаточно маски длиной 28 бит. Таким образом, минимально возможное значение IP-адреса сети для сети В:

IP адрес: 10101100.00010000.10101010.00000000

Маска: 11111111.11111111.11111111.11110000

Что в десятичном представлении записывается как: 172.16.170.0/28.

**Ответ: 172.16.170.0/28**

## 9. Операционные системы (1 балл)

### [Общая память]

Два устройства А и В могут записывать данные в общую область памяти. Данные записываются пакетами. Все пакеты одного устройства имеют одинаковый размер, причем известно, что размер пакета у любого устройства является целым числом КБайт. Пакеты записываются в память последовательно по одному от каждого устройства, первым в память записывает данные устройство А. Если оставшейся свободной памяти недостаточно для записи очередного пакета, устройству, пытающемуся записать этот пакет, возвращается сигнал ошибки, и оба устройства прекращают попытки записать данные. Никакой служебной информации, кроме самих пакетов, в память не записывается.

Определите размер пакета, записываемого устройством В, если известно, что:

1. При размере пакета устройства А в 17 КБайт, устройство А получит сигнал ошибки при попытке записи одиннадцатого пакета.
2. При размере пакета устройства А в 29 КБайт, устройство А получит сигнал ошибки при попытке записи десятого пакета.
3. Размер области памяти равен 1024 КБайт.

В ответе укажите целое число.

**Решение**

Согласно условию можно составить следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 17 * 10 + x * 10 \leq 1024 \\ 17 * 11 + x * 10 > 1024 \\ 29 * 9 + x * 9 \leq 1024 \\ 29 * 10 + x * 9 > 1024 \end{cases}$$

Первые два неравенства дают два возможных значения параметра  $x$  85 и 84. Вторые два дают возможные значения параметра  $x$  84, 83 и 82. Следовательно, решением всей системы является число 84.

Ответ: 84

## 10. Технологии программирования (2 балла)

Сервер одной крупной аналитической компании делает резервное копирование всех данных каждые пол часа. Системный администратор Илья Филиппович Яковлев заступит сегодня на смену в известное время. Он знает, что сервер делает резервное копирование в полночь (00:00:00), но не может посчитать, когда же было последнее резервное копирование на момент его заступления на смену.

Ваша задача — написать программу, которая определит время последнего резервного копирования перед началом смены Ильи Филипповича. Считается, что резервное копирование происходит мгновенно. Таким образом, если Илья Филиппович заступает в момент резервного копирования, считается, что оно происходит уже в его смену.

### Формат входного файла

В единственной строке входного файла **input.txt** находится время заступления Ильи Филипповича в формате **hh:mm:ss**, где **hh** обозначает часы в 24-часовом формате, **mm** — минуты, а **ss** — секунды. Гарантируется, что время корректно.

### Формат выходного файла

В выходной файл **output.txt** требуется вывести время последнего резервного копирования в аналогичном формате.

### Пример входных и выходных данных

input.txt	output.txt
12:55:00	12:30:00
00:00:00	23:30:00
18:30:03	18:30:00

## 11. Технологии программирования (4 балла)

Гриша пишет дипломную работу на тему автостоянок в Берляндии. В ходе дипломной работы ему потребовалось решать следующую задачу.

Машины в Берляндии представляют собой отрезки длиной  $l$ . Автостоянка представляет отрезок на прямой  $[0;M]$ . В точке  $0$  и точке  $M$  находятся стены. В некоторых точках  $X_i$  этого отрезка могут стоять машины, то есть левая граница отрезка, образующего машину, находится в точке  $X_i$ . Уже стоящие на стоянке машины не пересекаются, но могут стоять вплотную друг к другу или к стене.

Требуется поставить на стоянку еще одну машину, которая приехала из другой страны. Причем машина не должна выходить за границы стоянки и пересекаться с другими машинами. Гриша хочет выяснить, какую наибольшую длину может иметь приехавшая машина, чтобы ее можно было поставить в некоторую точку, принадлежащую стоянке. Причем машину поставить на стоянку не так просто, поэтому слева и справа расстояние от границ приехавшей машины до ближайшего препятствия (другой машины или стены) должно быть не меньше некоторого  $b$ .

С учетом этих требований найдите наибольшую длину автомобиля, который можно поставить на стоянку.

### Формат входного файла

В первой строке входного файла **input.txt** записаны четыре целых неотрицательных числа  $n$ ,  $M$ ,  $l$  и  $b$  ( $0 \leq n \leq 100$ ,  $1 \leq M \leq 100000$ ,  $1 \leq l \leq 100000$ ,  $0 \leq b \leq 100000$ ) — количество автомобилей на стоянке, длина стоянки, длина автомобиля в Берляндии и необходимое расстояние от границ приехавшего автомобиля до ближайшего препятствия.

В следующей строке находятся  $n$  неотрицательных чисел  $X_i$  ( $X_i < M$ ) — точки, в которых располагаются левые границы машин.

Гарантируется, что машины не пересекаются между собой, а также со стенами, но возможно соприкасаются.

### Формат выходного файла

Первая строка выходного файла **output.txt** должна содержать число  $L$  — максимально возможную длину автомобиля, который можно поставить на стоянку с учетом вышеизложенных требований.

Если не существует машины, которую можно было бы поставить, удовлетворяя все условия, выведите  $0$ .

### Пример входных и выходных данных

input.txt	output.txt
4 21 1 1	2
7 12 3 16	
4 30 3 1	3
24 5 11 18	
2 20 3 1	5
7 10	