

Всероссийская олимпиада школьников
 «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»
 Предмет: «Математика»

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Проверяющий

ОЧНЫЙ ЭТАП

10 класс

Вариант 1

Работа рассчитана на 240 минут, она содержит 8 заданий. Решать и оформлять решения заданий можно в любом порядке. Численные ответы не округлять.

1. (10 баллов) Докажите, что для любого натурального n существует натуральное число, которое больше своей суммы цифр в $\underbrace{11 \dots 11}_n$ раз.
2. (10 баллов) Решите уравнение: $2021x^3 + 2022x^2 + 2022x + 674 = 0$.
3. (12 баллов) Два прямоугольника $ABCD$ и $A EFG$ имеют общую вершину A и расположены на плоскости так, что точки B, E, D и G лежат на одной прямой (в указанном порядке). Пусть прямые BC и GF пересекаются в точке T , а прямые CD и EF – в точке H . Докажите, что точки A, H и T лежат на одной прямой.
4. (12 баллов) Пусть m и n – натуральные числа. Докажите, что число $5^n + 5^m$ можно представить в виде суммы двух точных квадратов тогда и только тогда, когда число $n - m$ чётное.
5. (12 баллов) Две окружности $C_1(O_1)$ и $C_2(O_2)$ с различными радиусами пересекаются в точках A и B . Касательная из точки A к C_1 пересекает касательную из точки B к C_2 в точке M . Докажите, что окружности из точки M видны под одинаковыми углами. (Говорят, что окружность видна из точки вне ее под углом α , если касательные, проведенные из этой точки к окружности, образуют угол α).
6. (14 баллов) Пусть x_k – положительный корень уравнения $x^k - x - 1 = 0$. Докажите, что

$$x_{25} < \frac{x_{20} + x_{30}}{2}$$
7. (14 баллов) В комнате стоят два ящика. В первом лежат n белых и m черных шаров, во втором – достаточно много черных. Из первого ящика наугад вынимают два шара. Если они одного цвета, то черный шар из второго ящика перекладывают в первый, если шары разного цвета, то белый шар возвращают в первый ящик. Так поступают до тех пор, пока в первом ящике не останется один шар. С какой вероятностью он будет белым?
8. (16 баллов) Клетки шахматной доски 12×12 раскрашены в 72 цвета так, что в каждый цвет покрашены ровно две клетки. Докажите, что на этой доске можно расставить 12

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»
Предмет: «Математика»

ладей так, чтобы они стояли на клетках разного цвета и никакие две из них не били друг друга. Две ладьи бьют друг друга, если они стоят в одной горизонтали или в одной вертикали доски.

Всероссийская олимпиада школьников
 «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»
 Предмет: «Математика»

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Проверяющий

ОЧНЫЙ ЭТАП

10 класс

Вариант 2

Работа рассчитана на 240 минут, она содержит 8 заданий. Решать и оформлять решения заданий можно в любом порядке. Численные ответы не округлять.

1. (10 баллов) Докажите, что для любого натурального n существует натуральное число, которое больше своей суммы цифр в $\underbrace{11 \dots 11}_n$ раз.
2. (10 баллов) Решите уравнение: $2021x^3 - 2022x^2 + 2022x - 674 = 0$.
3. (12 баллов) Два прямоугольника $ABCD$ и $A EFG$ имеют общую вершину A и расположены на плоскости так, что точки B, E, D и G лежат на одной прямой (в указанном порядке). Пусть прямые BC и GF пересекаются в точке T , а прямые CD и EF – в точке H . Докажите, что точки A, H и T лежат на одной прямой.
4. (12 баллов) Пусть m и n – натуральные числа. Докажите, что число $5^n + 5^m$ можно представить в виде суммы двух точных квадратов тогда и только тогда, когда число $n - m$ чётное.
5. (12 баллов) Две окружности $C_1(O_1)$ и $C_2(O_2)$ с различными радиусами пересекаются в точках A и B . Касательная из точки A к C_1 пересекает касательную из точки B к C_2 в точке M . Докажите, что окружности из точки M видны под одинаковыми углами. (Говорят, что окружность видна из точки вне ее под углом α , если касательные, проведенные из этой точки к окружности, образуют угол α).
6. (14 баллов) Пусть x_k – положительный корень уравнения $x^k - x - 1 = 0$. Докажите, что
$$x_{16} < \frac{x_{10} + x_{40}}{2}.$$
7. (14 баллов) В комнате стоят два ящика. В первом лежат n белых и m черных шаров, во втором – достаточно много белых. Из первого ящика наугад вынимают два шара. Если они одного цвета, то белый шар из второго ящика перекладывают в первый; если шары разного цвета, то черный шар возвращают в первый ящик. Так поступают до тех пор, пока в первом ящике не останется один шар. С какой вероятностью он будет белым?
8. (16 баллов) Клетки шахматной доски 10×10 раскрашены в 50 цветов так, что в каждый цвет покрашены ровно две клетки. Докажите, что на этой доске можно расставить 10

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»
Предмет: «Математика»

ладей так, чтобы они стояли на клетках разного цвета и никакие две из них не били друг друга. Две ладьи бьют друг друга, если они стоят в одной горизонтали или в одной вертикали доски.