ОЧНЫЙ ЭТАП

8-9 класс

Вариант 1

Задание 1 (10 баллов). Состоятельный Крот сообщил Дюймовочке, что если разделить ее рост в сантиметрах пополам и найденное число уменьшить на 20%, то получится ее рост в дюймах. Дюймовочка решила, что если ее рост в дюймах умножить на 2 и увеличить найденное число на 20%, то получится ее рост в сантиметрах. Крот указал на ошибку и назвал число, равное количеству процентов, на которые следует увеличить удвоенный рост Дюймовочки в дюймах чтобы получить верный рост в сантиметрах. Какое число назвал Крот? На сколько процентов от верного значения ошиблась Дюймовочка?

Ответ: Крот назвал число 25, Дюймовочка ошиблась на 4% в меньшую сторону.

Решение. Из условия следует, что Крот считает один сантиметр равным 0.4 дюйма (0.5-0.1=0.4; это верно, если 1дюйм=2.5 см). $2 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.8 = 1$, поэтому Крот назвал число 25. Если 0.4 дюйма перевести в сантиметры методом Дюймовочки, то получится 0.8+0.16=0.96 (см), т.е. она ошиблась на 4% в меньшую сторону.

Критерии	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	$+$	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.	$\pm$	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	$+ / 2$	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	$-$	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 2 (10 баллов). Натуральное число n является произведением $2k$ простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_{2k}$ в некоторых степенях, больших нуля. Может ли $\frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + \cdots - \frac{n}{p_{2k}} = 0$?

Решение. Очевидно, что каждая дробь является целым числом. Если n делится на p_1^k, но не делится на p_1^{k+1}, то одна из дробей делится на p_1^{k-1}, но не делится на p_1^k, а все остальные делятся на p_1^k, значит левая часть не делится на p_1^k, но правая делится, противоречие.

Критерии	**Оценка**	**Баллы**

Задача решена полностью.	$+$	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.	$\pm$	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	$+/2$	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	$-$	0
Задача не решалась.	0	0

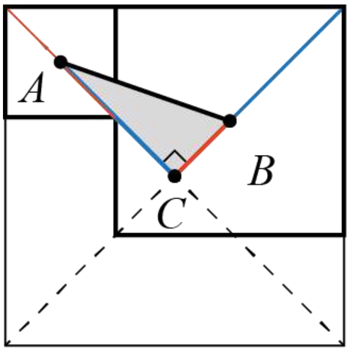
Задание 3 (12 баллов). Четырехугольник $ABCD$ ($AB > BC$) вписан в окружность Ω. Известно, что $AD = CD$. Пусть биссектриса угла ADB пересекает AC в точке M, а AB – в точке N. Докажите, что треугольник MAN равнобедренный.

Решение. Пусть биссектриса угла ADB пересекает Ω в точке P . Тогда угол между хордами AC и DP окружности Ω равен полусумме градусных мер дуг AP и CD, что равно полусумме углов B и C треугольника ABC, то есть равно 90^0 $-\angle BAC/2$, значит, биссектриса угла ADB отсекает от угла BAC равнобедренный треугольник. (Есть еще много способов посчитать углы).

Критерии	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	$+$	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования	$\pm$	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	$+/2$	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	$-$	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 4 (12 баллов). Дан треугольник ABC с прямым углом C. Докажите, что можно построить три квадрата с центрами в точках A, B и C такие, что какие бы два из них не выбрали, существуют две прямые, на каждой из которых лежит по одной стороне каждого выбранного квадрата.

Решение. Откладываем на продолжении стороны AC за точку A отрезок длины BC, на продолжении стороны BC за точку B – отрезок длины AC и строим квадраты с центрами в A, B и C и вершинами в построенных точках как на рисунке. Полученные квадраты очевидно удовлетворяют условию.

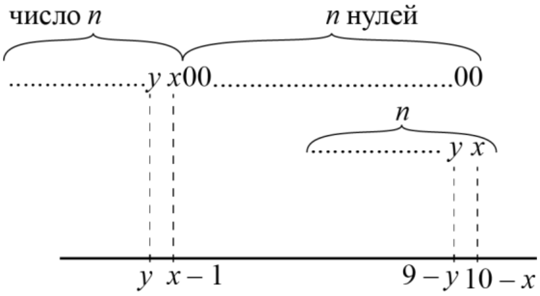


Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+ / 2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5 (12 баллов). Докажите, что для любого натурального n существует натуральное число, которое больше своей суммы цифр в $\underbrace{11\ldots11}_{n}$ раз.

Решение. Условию удовлетворяет число $n(10^n - 1)$

У числа $n(10^n - 1)$ сумма цифр равна $9n$. Убедиться в этом можно, рассмотрев десятичную запись числа $n(10^n - 1)$, получающуюся в результате вычитания $n \cdot 10^n$ и n.



(Если n оканчивается на k нулей, то будем рассматривать вместо него число $n \cdot 10^{-k}$, очевидно, что сумма цифр не поменяется. Заметим , что $10^n > n$. Если последняя цифра числа n равна x, то у $n(10^n - 1)$ последняя цифра будет 10-x, если предпоследняя цифра y, то у $n(10^n - 1)$ предпоследняя цифра будет 9-y и т.д. А в начале числа $n(10^n - 1)$ будут идти цифры числа n (см. рис). Далее легко видеть, что сумма цифр $n(10^n - 1)$ будет равна $9n$.)

Критерии	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые части обоснования	±	8
Приведено число $n(10^n - 1)$ без доказательства	+ / 2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6 (14 баллов). На продолжении биссектрисы CL треугольника ABC за точку L взята точка M, так что $LM = AC$, $CM = BC$. Докажите, что BM меньше периметра треугольника ACL.

Решение. Отметим на отрезке BC точку K так, что $CK = AC$. Треугольники ACL и KCL равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $AL = LK$. $BK = BC- CK = BC- AC = CM- ML = CL$. По неравенству ломаной $MB < ML + LK + BK = AC + AL + CL = P_{ACL}$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	10
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Верный ответ без обоснования.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов). Зрители называют фокуснику натуральное число $n > 2$. Затем Фокусник пишет на доске натуральное число $k > n$. После чего зрители пишут следующие n последовательных чисел $k+1, k+2, \dots, k+n$. Далее Фокусник стирает с доски одно из чисел так, что все оставшиеся числа являются составными. Как он это делает?

Решение. Пусть фокусник напишет $k = 2 \cdot n!$. Далее фокусник стирает число $k + 1$. Тогда число $2 \cdot n! + m$ делится на $m > 2$ и больше m, так как $n > 2 \Rightarrow n! > n \Rightarrow$
$2 \cdot n! > 2n \Rightarrow 2 \cdot n! + m > 2n - m \geq m$, значит, оно составное.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	10
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Верный ответ без обоснования.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 8 (16 баллов). Даны положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ с суммой 1. Положительные числа $b_1, b_2, \dots, b_{100}$ таковы, что все выражения $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_{100}}{b_{100}}$ меньше 1000. Докажите, что и сумма $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_{100}^2}{b_{100}}$ тоже меньше 1000.

Решение. Пусть $\frac{a_1}{b_1}$ имеет максимальное значение среди выражений $\frac{a_i}{b_i}$, тогда $1000 > \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{100})}{b_1} = \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_1 a_2}{b_1} + \dots + \frac{a_1 a_{100}}{b_1} \geq \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_{100}^2}{b_{100}}$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	16
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	12
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+/2	8

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	4
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Верный ответ без обоснования.	–	0
Задача не решалась.	0	0

ОЧНЫЙ ЭТАП

8-9 класс

Вариант 2

Задание 1 (10 баллов). Состоятельный Крот сообщил Дюймовочке, что если разделить ее рост в сантиметрах на три и найденное число уменьшить на 10%, то получится ее рост в дюймах. Дюймовочка решила, что если ее рост в дюймах умножить на 3 и увеличить найденное число на 10%, то получится ее рост в сантиметрах. Крот указал на ошибку и назвал число, равное количеству процентов, на которые следует увеличить удвоенный рост Дюймовочки в дюймах чтобы получить верный рост в сантиметрах. Какое число назвал Крот? На сколько процентов от верного значения ошиблась Дюймовочка?

Ответ: Крот назвал число 200/3, Дюймовочка ошиблась на 1% в меньшую сторону.

Решение. Из условия следует, что Крот считает один сантиметр равным 0.3 дюйма. $2 \cdot 0.3 + 2/3 \cdot 0.6 = 1$, поэтому Крот назвал число 200/3. Если 0.3 дюйма перевести в сантиметры методом Дюймовочки, то получится 0.9+0.09=0.99 (см), т.е. она ошиблась на 1% в меньшую сторону.

Критерии	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	$+$	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.	$\pm$	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	$+ / 2$	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	$-$	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 2 (10 баллов). Натуральное число n является произведением $2k+1$ простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_{2k+1}$ в некоторых степенях, больших нуля. Может ли $\frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + \dots - \frac{n}{p_{2k}} + \frac{n}{p_{2k+1}} = 0$?

Решение. Очевидно, что каждая дробь является целым числом. Если n делится на p_1^k, но не делится на p_1^{k+1}, то одна из дробей делится на p_1^{k-1}, но не делится на p_1^k, а все остальные делятся на p_1^k, значит левая часть не делится на p_1^k, но правая делится, противоречие.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	$+$	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.	$\pm$	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	$+/2$	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	$-$	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (14 баллов). На продолжении биссектрисы CL треугольника ABC за точку L взята точка M, так что $LM = AC$, $CM = BC$. Докажите, что BM меньше периметра треугольника ACL.

Решение. Отметим на отрезке BC точку K так, что $CK = AC$. Треугольники ACL и KCL равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $AL = LK$. $BK = BC - CK = BC - AC = CM - ML = CL$. По неравенству ломаной $MB < ML + LK + BK = AC + AL + CL = P_{ACL}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	$\pm$	10
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	$\mp$	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Верный ответ без обоснования.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 4 (16 баллов). Даны положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ с суммой 2. Положительные числа $b_1, b_2, \dots, b_{100}$ таковы, что все выражения $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_{100}}{b_{100}}$ меньше 1000. Докажите, что и сумма $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_{100}^2}{b_{100}}$ меньше 2000.

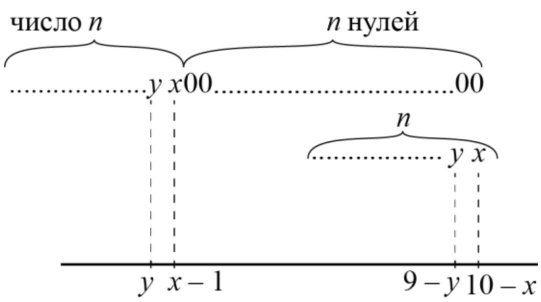
Решение. Пусть $\frac{a_1}{b_1}$ имеет максимальное значение среди выражений $\frac{a_i}{b_i}$, тогда $2000 > \frac{2a_1}{b_1} = \frac{a_1\cdot(a_1+a_2+\cdots+a_{100})}{b_1} = \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_1a_2}{b_1} + \cdots + \frac{a_1a_{100}}{b_1} \geq \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_{100}^2}{b_{100}}$

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	16
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	12
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+/2	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	4
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Верный ответ без обоснования.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5 (12 баллов). Докажите, что для любого натурального n существует натуральное число, которое больше своей суммы цифр в $\underbrace{11\ldots11}_{n}$ раз.

Решение. Условию удовлетворяет число $n(10^n - 1)$.

У числа $n(10n - 1)$ сумма цифр равна $9n$. Убедиться в этом можно, рассмотрев десятичную запись числа $n(10n - 1)$, получающуюся в результате вычитания $n \cdot 10n$ и n.



(Если n оканчивается на k нулей, то будем рассматривать вместо него число $n \cdot 10{-}k$, очевидно, что сумма цифр не поменяется. Заметим , что $10n > n$. Если последняя цифра числа n равна x, то у $n(10n - 1)$ последняя цифра будет 10-x, если предпоследняя цифра y, то у $n(10n - 1)$ предпоследняя цифра будет 9-y и т.д. А в начале числа $n(10n - 1)$ будут идти цифры числа n (см. рис). Далее легко видеть, что сумма цифр $n(10n - 1)$ будет равна

$9n$.)

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	$+$	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые части обоснования	$\pm$	8
Приведено число $n(10^n - 1)$ без доказательства	$+/2$	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	$-$	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6 (12 баллов). Четырехугольник *ABCD* (*AB* > *BC*) вписан в окружность Ω. Известно, что *AD* = *CD*. Пусть биссектриса угла *ADB* пересекает *AC* в точке *M*, а *AB* – в точке *N*. Докажите, что треугольник *MAN* равнобедренный.

Решение. Пусть биссектриса угла *ADB* пересекает Ω в точке *P* . Тогда угол между хордами *AC* и *DP* окружности Ω равен полусумме градусных мер дуг *AP* и *CD*, что равно полусумме углов *B* и *C* треугольника *ABC*, то есть равно $90^0 - \angle BAC/2$, значит, биссектриса угла *ADB* отсекает от угла *BAC* равнобедренный треугольник. (Есть еще много способов посчитать углы).

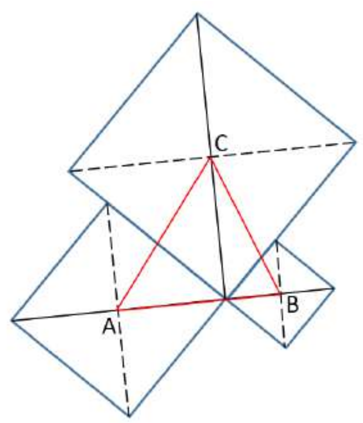
Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	$+$	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования	$\pm$	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	$+/2$	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	$-$	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов). Зрители называют фокуснику натуральное число $n > 2$. Затем Фокусник пишет на доске натуральное число $k > n$. После чего зрители пишут предыдущие n последовательных чисел $k-1, k-2, \dots, k-n$. Далее Фокусник стирает с доски одно из чисел так, что все оставшиеся числа являются составными. Как он это делает?

Решение. Пусть фокусник напишет $k = 2 \cdot n!$. Далее фокусник стирает число $k + 1$. Тогда число $2 \cdot n!$ - m делится на $m > 2$ и больше m, так как $n > 2 \Rightarrow n! > n \Rightarrow$
$2 \cdot n! > 2n \Rightarrow 2 \cdot n! - m > 2n - m \geq m$, значит, оно составное.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	10
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Верный ответ без обоснования.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 8 (12 баллов). Дан остроугольный треугольник ABC. Докажите, что можно построить три квадрата с центрами в точках A, B и C такие, что какие бы два из них не выбрали, существуют две прямые, на каждой из которых лежит по одной стороне каждого выбранного квадрата.
Решение. Проведем высоту из вершины C и построим квадрат с центром C и вершиной в основании высоты (см. рисунок), аналогично строим два других квадрата. Полученные квадраты очевидно удовлетворяют условию.



Критерии	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	$+$	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования	$\pm$	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	$+/2$	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	$-$	0
Задача не решалась.	0	0