11 класс Вариант 1

Задание 1(10). В фирме работало 150 сотрудников, в том числе 73 женщины. Затем произошло объединение с другой фирмой, где женщины составляли 40%. В результате доля женщин среди сотрудников стала равна p%. Найдите все возможные целые значения p.

Решение. В фирме, с которой произошло объединение, отношение числа женщин к числу мужчин равнялось $40:60=2:3$. Поэтому можно полагать, что там было $2n$ женщин и $3n$ мужчин, где n – некоторое натуральное число. В результате объединения получилась фирма, среди $150+5n$ сотрудников которой, ровно $73+2n$ женщин. Поскольку $p=\frac{73+2n}{150+5n}\cdot 100=\frac{7300+200n}{150+5n}=\frac{1460+40n}{30+n}=40+\frac{260}{30+n}$, то число $30+n$ делит 260 и может быть равным 260, 130, 65 или 52. Соответствующие значения p равны 41, 42, 44 и 45.

Ответ: 41, 42, 44, 45.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Задача решалась по верному плану, но перебор проведён не до конца: не доказано, что других значений p нет.	±	7
Составлены верные соотношения, связывающие p и n но дальше продвижений нет.	+ / 2	3
Решение в целом не верное, но содержит все или часть искомых значений p (и не содержит других).	∓	2, если все 1, если не все

Задание 2(10). Через каждую пару противоположных рёбер куба проведена плоскость. На сколько частей эти плоскости разбивают куб?

Решение. Каждая такая плоскость проходит через пару параллельных диагоналей противоположных граней куба. Поэтому каждая грань разбита на 4, а вся поверхность куба – на $4\cdot 6=24$ треугольника, каждые два из которых отделены друг от друга хотя бы одной из проведённых плоскостей. А поскольку все проведённые плоскости пересекаются в центре куба, то каждая часть содержит в качестве одной из своих граней один из этих 24 треугольников. Следовательно, число частей разбиения также равно 24.

Ответ: 24.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Есть значительное продвижение в доказательстве ответа, но есть и пробелы в рассуждении.	±	8
Есть попытка доказательства и/или только правильный чертёж.	+ / 2	4
Приведён верный ответ без каких-либо обоснований.	∓	1

Задание 3(12). Найдите значение дробей $A\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}$ и $B\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma}$, если числа α,β и γ таковы, что $A=3B$.

Решение. Так как $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=$
$=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, то $A=\mathrm{ctg}\,\beta\,\mathrm{ctg}\,\gamma+\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\gamma+\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta-1=$
$=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}+\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\gamma}+\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}-1=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma}-1=B-1.$ Из равенств $A=B-1$ и $A=3B$ находим $A=\frac{-3}{2}$, $B=\frac{-1}{2}$.

Ответ: $A=\frac{-3}{2}$, $B=\frac{-1}{2}$.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Ответ получен только для частного случая (например, когда $\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$).	∓	4

Задание 4(12). A',B' и C' – проекции вершины S правильной треугольной пирамиды $SABC$ на биссекторные плоскости двугранных углов при рёбрах BC, AC и AB. Найдите тангенс каждого из этих углов, если объём пирамиды $SA'B'C'$ в 10 раз меньше объёма пирамиды $SABC$.

Решение. Точки S_1,S_2 и S_3 симметричные S относительно биссекторных плоскостей, лежат в плоскости ABC. А поскольку тройка этих биссекторных плоскостей переходит в себя при повороте на 60° вокруг оси пирамиды, то этим свойством обладает и тройка точек S_1,S_2,S_3. Следовательно, треугольник $S_1S_2S_3$ –правильный, и его центр, который мы обозначим через O, совпадает с центром треугольника ABC.

Заметим, далее, что пирамида $SS_1S_2S_3$ – образ пирамиды $SA'B'C'$ при гомотетии с центром S и коэффициентом 2. С учётом условия задачи это означает, что отношение объёмов пирамид $SABC$ и $SS_1S_2S_3$ равно $10:2^3 = 10:8 = 5:4.$ А поскольку у этих пирамид общая высота SO, то и отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $S_1S_2S_3$ равно 5:4. В качестве следствия получается равенство $OA:OS_1 = \sqrt{5}:2,$ которое будет нами использовано.

Обозначив величину двугранного ребра при ребре BC через $\varphi,$ точкой, симметричной S относительно соответствующей биссекторной плоскости будем считать $S_1.$ Тогда $\varphi = \angle SPA = \angle SPS_1,$ где P – середина ребра BC; треугольник SPS_1 равнобедренный $(SP = PS_1)$, откуда $\angle SS_1P = \dfrac{180^\circ - \varphi}{2},$ $OS_1 = SO\operatorname{ctg}\angle SS_1P = SO\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}.$ А поскольку $OA = 2\cdot OP = 2\cdot SO\operatorname{ctg}\varphi,$ то $\dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{OA}{OS_1} = \dfrac{2\operatorname{ctg}\varphi}{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{4}{\sqrt{5}}.$ При $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ левая часть последнего равенства равна $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} - 1,$ что позволяет найти $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\dfrac{16+8\sqrt{5}}{5}}.$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{16+8\sqrt{5}}{5}}.$

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Задача в основном решена, но в ответе указано значение другой тригонометрической функции угла φ.	+.	11
Ход решения верный, но на заключительных его этапах допущены вычислительные ошибки.	±	8
Намечен верный план решения, но нет нужных соотношений для угла φ.	∓	3

Задание 5(12). Последовательность (a_n) определена условиями $a_1 = 0,01$ и $(n+2)a_n = na_{n+1}$ для $n = 1, 2, ..., 99.$ Найдите сумму $a_1 + a_2 + ... + a_{100}.$

Решение. Последовательно сложив равенства $3a_1 = a_2,$ $4a_2 = 2a_3,$ $5a_3 = 3a_4, ..., 101a_{99} = 99a_{100},$ приведя замет подобные члены и сократив на 3, получим $a_1 + a_2 + ... + a_{99} = 33a_{100}.$ Поэтому искомая сумма $S = 34a_{100}.$ А поскольку $a_{100} = \dfrac{101}{99}a_{99} = \dfrac{101}{99}\cdot\dfrac{100}{98}a_{98} = ... = \dfrac{101\cdot 100\cdot ...\cdot 4\cdot 3}{99\cdot 98\cdot ...\cdot 2\cdot 1}a_1 = \dfrac{101\cdot 100}{2}a_1 = 50,5,$ то $S = 34\cdot 50,5 = 1717.$

Ответ: 1717.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Задача не решена, но есть доказательство одного из двух нужных равенств ($S = 34a_{100}$ или $a_{100} = \dfrac{101\cdot 100}{2}a_1$).	∓	3

Задание 6(14). На сторонах BC, CA и AB неравнобедренного треугольника ABC выбраны точки L, M и N соответственно. Биссектриса угла ABC и серединный перпендикуляр к отрезку NL пересекаются в точке P. Известно, что $\angle ABC = 135^\circ,$ $AN = NM = ML = LC = 1.$ Найдите длину отрезка MP.

Решение. Так как из условий $AN = NM$ и $ML = LC$ следуют равенства $\angle AMN = \angle BAC$ и $\angle CML = \angle BCA$ соответственно, то $\angle LMN = 180^\circ - \angle AMN - \angle CML = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = \angle ABC.$ Заметим, далее, что точка P лежит на описанной окружности треугольника NBL (и делит пополам дугу NL, не содержащую B). Поэтому $\angle LPN = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle LMN$ с учётом того, что P и M лежат в одной полуплоскости относительно прямой LN, заключаем, что P – ортоцентр треугольника LMN.

Рассмотрим теперь треугольник LPM. Используя равенства $\angle LMN = 135^\circ,$ $\angle LPN = 45^\circ$ и равнобедренность треугольника LPN, нетрудно найти углы $\angle PLM = 45^\circ$ и $\angle LPM = 22^\circ 30'.$ Применив теорему синусов, получим $\dfrac{MP}{\sin 45^\circ} = \dfrac{ML}{\sin 22^\circ 30'}$, откуда $MP = 2\cos 22^\circ 30' = 2\sqrt{\dfrac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}.$

Ответ: $\sqrt{2+\sqrt{2}}.$

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
При правильном ходе решения допущены ошибки на заключительном этапе вычислений.	±	10
Доказано, что *P* – ортоцентр треугольника *LMN*, но дальнейших продвижений нет.	∓	4
Свойства точки *P* не доказаны, но использованы верно.	∓	4

Задание 7(14). Число $a>0$ таково, что неравенства $2\le a^n\le 4$ выполняются ровно при пяти натуральных значениях *n*. При скольких натуральных значениях *n* могут выполняться неравенства $4\le a^n\le 8$?

Решение. Ясно, что $a>1$. Полагая $\log_a 2=\alpha$, неравенства $2\le a^n\le 4$ перепишем в виде $\alpha\le n\le 2\alpha$, а неравенства $4\le a^n\le 8$ – в виде $2\alpha\le n\le 3\alpha$. Согласно условию, для некоторого натурального числа *m* выполнены неравенства $m-1<\alpha\le m<m+4\le 2\alpha<m+5$. Из них следует, что $2m-2<2\alpha\le 2m<2m+3<3\alpha<2m+5$; таким образом, неравенствам $2\alpha\le n\le 3\alpha$ обязательно удовлетворяет четвёрка чисел $\{2m;2m+1;2m+2;2m+3\}$ и, возможно, одно или оба числа пары $\{2m-1;2m+4\}$.

Приведём три соответствующих примера. При $\alpha=4{,}6$ имеем $m=5$ и $2m-1<2\alpha<3\alpha<2m+4$; при $\alpha=5{,}2$ число *m* равно 6 и выполняются неравенства $2\alpha<2m-1<3\alpha<2m+4$; наконец, если $\alpha=5{,}4$, то $m=6$ и $2\alpha<2m-1<2m+4<3\alpha$.

Ответ: четыре, пять или шесть.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Получен ответ «от четырёх до шести», но не показано, что эти три возможности реализуются.	±	9
Приведены все три соответствующих примера, но одна из границ (верхняя или нижняя) не доказана.	+ / 2	6
Приведены только соответствующие примеры.	∓	3

Задание 8(16). В стране 20 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Беспосадочный перелёт из *А* в *Б* назовём централизующим, если из *Б* можно в большее, чем из *А*, число городов долететь без пересадки. Какое наибольшее число городов может насчитывать авиамаршрут, все перелёты на котором централизующие?

Решение. Через $|A|$, где *A* – произвольный город, обозначим число городов, соединённых беспосадочными авиалиниями с *A*. Будем рассматривать авиамаршрут, который проходит последовательно через города $A_1,A_2,\dots,A_m$, и все перелёты на котором централизующие. Ясно, что тогда $1\le|A_1|<|A_2|<\dots<|A_m|$

Равенство $m=19$ невозможно, поскольку имело бы своими следствиями взаимоисключающие равенства $|A_{19}|=19$ и $|A_1|=1$.

Допустим, что $m=18$ и $|A_{18}|=19$. Тогда $|A_1|=2,|A_2|=3,\dots,|A_{17}|=18$, то есть город A_{17} соединён либо с A_1, либо с A_2. Но A_1 соединён с A_2 и A_{18}, а A_2 – с A_1, A_3 и A_{18}.

Наконец, предположим, что $m=18$ и $|A_{18}|=18$. Тогда $|A_1|=1$, A_1 соединён с A_2; $|A_2|=2$, A_2 соединён с A_1 и A_3. Получается, что город A_{18} не соединён ни с A_1, ни с A_2, а тогда равенство $|A_{18}|=18$ невозможно.

Итак, $m\le 17$. Приведём пример системы авиалиний, для которой все перелёты на маршруте, проходящем последовательно через города $A_1,A_2,\dots,A_{17}$, централизующие. Пусть города A_i и A_j соединены, если выполнено хотя бы одно из следующих трёх условий:

1) $i+1=j$;

2) $i+j\ge 20$, причём $11\le j\le 17$;

3) $j=10$, $j\in\{19;20\}$.

Ответ: 17.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	16
Приведён пример, но не доказана оценка	+ / 2	8
Доказана оценка, но нет верного примера.	∓	4

Вариант 2

Задание 1(10). На предприятии доля мужчин среди работников составляла 48%. По сокращению штата было уволено 25 человек, в том числе 10 мужчин. После этого доля мужчин среди работников стала равна q%. Найдите все возможные целые значения q.

Решение. До сокращения штатов отношение числа мужчин к числу женщин равнялось $48:52=12:13$. Поэтому можно полагать, что было $12m$ мужчин и $13m$ женщин, где m – некоторое натуральное число. После сокращения осталось $12m-10$ мужчин среди $12m+13m-25=25(m-1)$ всех работников. Поскольку $q=\dfrac{12m-10}{25(m-1)}\cdot 100=\dfrac{48m-40}{m-1}=40+\dfrac{8}{m-1}$, то число $m-1$ делит 8, откуда $m\in\{2;3;5;9\}$ и, соответственно, $q\in\{56;52;50;49\}$.

Ответ: 49, 50, 52, 56.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Задача решалась по верному плану, но перебор проведён не до конца: не доказано, что других значений q нет.	±	7
Составлены верные соотношения, связывающие q и m, но дальше продвижений нет.	+ / 2	3
Решение в целом не верное, но содержит все или часть искомых значений q (и не содержит других).	∓	2, если все 1, если не все

Задание 2(10). Через каждые три несмежные вершины куба проведена плоскость. На сколько частей эти плоскости разбивают куб?

Решение. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все 8 проведённых плоскостей делятся на две группы, первую из которых составляют плоскости граней тетраэдра AB_1CD_1, а вторую – плоскости граней тетраэдра A_1BC_1D. В каждой группе плоскости внутри куба не пересекаются.

Плоскостями первой группы куб разбивается на 5 тетраэдров – «центральный» (AB_1CD_1) и 4 «угловых». При этом «центральный» пересечён всеми 4 плоскостями второй группы и разбит, следовательно, на $1+4=5$ частей; каждый «угловой» тетраэдр пересечён 3 плоскостями второй групп и разбит на $1+3=4$ части. Всего, таким образом, имеем $5+4\cdot 4=21$ часть.

Ответ: 21.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Есть значительное продвижение в доказательстве ответа, но есть и пробелы в рассуждении.	±	8
Есть некоторые верные утверждения или верный чертёж.	+ / 2	4
Приведён верный ответ без каких-либо обоснований.	∓	2

Задание 3(12). Найдите значения дробей $A=\dfrac{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$ и $B=\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta+\mathrm{ctg}\gamma}{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta\cdot\mathrm{ctg}\gamma}$, если числа α,β и γ таковы, что $A=3B$.

Решение. Так как $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=$ $=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$, то $A=1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma$. При этом $B=\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\beta\mathrm{ctg}\gamma}+\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\gamma}+\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta}=\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma=1-A$. Из равенства $B=1-A$ и $A=3B$ находим $A=\dfrac{3}{4}$, $B=\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $A=\dfrac{3}{4}$, $B=\dfrac{1}{4}$.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Ответ получен только для частного случая (например, когда $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{4}$).	∓	4

Задание 4(12). Косинус двугранного угла при каждом из рёбер AB, BC, CD и DA основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равен 0,8. Точки K, L, M и N являются проекциями точки S на биссекторные плоскости при рёбрах основания. Найдите отношение объёма многогранника *SKLMN* к объёму пирамиды *SABCD*.

Решение. Точки K_1, L_1, M_1 и N_1, симметричные точке *S* относительно указанных биссекторных плоскостей, лежат в плоскости *ABCD*. А поскольку вся четвёрка биссекторных плоскостей переходит в себя при повороте на 90° вокруг оси пирамиды, то этим же свойством обладает и четвёрка (K_1, L_1, M_1, N_1). Можно считать, что эти точки образуют квадрат $K_1L_1M_1N_1$, центр *O* которого совпадает с центром квадрата *ABCD*.

Найдём отношение площадей этих квадратов. Пусть *P* – середина ребра *AB*, а точкой, симметричной *S* относительно соответствующей биссекторной плоскости, является K_1. Тогда $SP = PK_1$, $OP = 0{,}8 \cdot SP = 0{,}8 \cdot PK_1$, откуда $OK_1 = PK_1 - OP = \dfrac{1}{4} \cdot OP$. Но площадь квадрата $K_1L_1M_1N_1$, в котором отрезок OK_1 – половина диагонали, равна $2\left(OK_1\right)^2$, тогда как площадь квадрата *ABCD*, сторона которого вдвое длиннее отрезка OP, равна $4 \cdot \left(OP\right)^2 = 64 \cdot \left(OK_1\right)^2$. Значит, отношение площадей равно $2:64 = 1:32$.

Поэтому объём пирамиды $SK_1L_1M_1N_1$ составляет $\dfrac{1}{32}$ объём пирамиды *SABCD*. Остаётся заметить, что многогранник *SKLMN*, будучи образом пирамиды $SK_1L_1M_1N_1$ при гомотетии с центром *S* и коэффициентом $\dfrac{1}{2}$, имеет объём, равный $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$ объёма пирамиды $SK_1L_1M_1N_1$. Перемножим $\dfrac{1}{32}$ и $\dfrac{1}{8}$, получим ответ.

Ответ: $\dfrac{1}{256}$.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Ход решения и вычисления верны, но рассуждения содержат незначительные проблемы.	±	10
Намечен верный план решения, но не удалось получить все необходимые отношения длин и площадей.	∓	3

Задание 5(12). Последовательность $\left(a_n\right)$ определена условиями $a_0 = a_1 = 1$ и $a_{n+2} = \left(n+3\right)a_{n+1} - \left(n+1\right)a_n$ для $n = 0, 1, 2, \ldots, 98.$ Найдите a_{100}.

Решение. Так как $a_{n+2} - \left(n+2\right)a_{n+1} = a_{n+1} - \left(n+1\right)a_n$ для любого $n \ge 0,$ то $a_{100} - 100a_{99} = a_{99} - 99a_{98} = a_{98} - 98a_{97} = \ldots = a_2 - 2a_1 = a_1 - a_0.$ В силу условия $a_0 = a_1 = 1$ все эти 100 разностей равны нулю. Значит, выполнены равенства $a_{100} = 100a_{99} = 100 \cdot 99a_{98} = 100 \cdot 99 \cdot 98a_{97} = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 2a_1 = 100!.$

Ответ: 100!.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Ответ дан только на основе вычислений для небольших *n*.	$\underset{\cdot}{-}$	1

Задание 6(14). На сторонах *BC*, *CA* и *AB* остроугольного неравнобедренного треугольника *ABC* выбраны точки *L*, *M* и *N* соответственно. В треугольнике *LMN* проведена высота *MP*. Известно, что $AN = NM = ML = LC$ и что биссектриса угла *ABC* проходит через середину отрезка *MP*. Найдите величину угла *ABC*.

Решение. Обозначим искомую величину через *x*, а середину отрезка *MP* – через *Q*. Из условий $AN = NM$ и $ML = LC$ следуют равенства $\angle AMN = \angle BAC$ и $\angle CML = \angle BCA$ соответственно, поэтому $\angle LMN = 180^\circ - \angle AMN - \angle CML = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = x.$ Заметим, далее, что из условия $NM = ML$ следует, что прямая *MP* – серединный перпендикуляр к отрезку *LN*; с учётом условия $\angle ABQ = \angle CBQ$ это означает, что *Q* – середина дуги *NL* описанной окружности треугольника *NBL*, причём дуга не содержит точку *B*. По $\angle LQN = 180^\circ - x = 180^\circ - \angle LMN$ и, ввиду того, что *Q* и *M* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *LN*, заключаем, что *Q* – точка пересечения высот треугольника *LMN*.

Из равенств $LP = MP\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $LP = QP\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ - x}{2}$ и условия $MP = 2 \cdot QP$ получаем равенство $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ - x}{2}$, откуда $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2} = 2$ и $x = 2\operatorname{arctg}\sqrt{2}.$

Ответ: $2\operatorname{arctg}\sqrt{2}.$

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
При правильном ходе решения допущены ошибки на заключительном этапе вычислений.	±	10
Доказано, что Q – точка пересечения высот треугольника LMN, но дальнейших продвижений нет.	∓	4
Свойства точки Q не доказаны, но использованы верно.	∓	4

Задание 7(14). Число $a>1$ таково, что неравенства $5<a^n<25$ выполняются ровно при четырёх натуральных значениях n. При скольких натуральных значениях n могут выполнятся неравенства $25<a^n<125$?

Решение. Полагая $\log_a 5=\alpha$, неравенства $5<a^n<25$ перепишем в виде $\alpha<n<2\alpha$, а неравенства $25<a^n<125$ – в виде $2\alpha<n<3\alpha$. Согласно условию, для некоторого натурального числа m выполнены неравенства $m-1<\alpha<m<m+3<2\alpha<2m+4$. Из них следует, что $2m-2<2\alpha<2m<2m+2<3\alpha<2m+4$; таким образом, неравенствам $2\alpha<n<3\alpha$ обязательно удовлетворяют числа $2m, 2m+1, 2m+2$ и, возможно, одно или оба числа пары $\{2m-1;2m+3\}$.

Приведём три соответствующих примера. При $\alpha=3,6$ имеем $m=4$ и $2m-1<2\alpha<3\alpha<2m+3$; при $\alpha=3,7$ число m также равно 4, но $2m-1<2\alpha<2m+3<3\alpha$; наконец, при $\alpha=4,4$ получается $m=5$ и $2\alpha<2m-1<2m+3<3\alpha$.

Ответ: три, четыре или пять.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Получен ответ «от трёх до пяти», но не показано, что все эти возможности реализуются.	±	9
Приведены три соответствующих примера, но доказана только одна из границ числа решений.	+ / 2	6
Приведены только примеры для 3, 4, 5 решений.	∓	3

Задание 8(16). В турнире 20 шахматистов, каждый сыграл по одной партии с каждым из остальных. В итоге нашлась цепочка участников $A_1, A_2, \ldots, A_n,$ где каждый, начиная с A_2, набрал на ½ очка больше, чем предыдущий. Каким наибольшим могло быть число n? (За выигрыш партии начисляется 1 очко, за ничью ½, за поражение 0.)

Решение. Через $|A|$, где A – произвольный участник, будем обозначать число очков, набранных A. Тогда, если $|A_1|=m$, то $|A_k|=m+\frac{k-1}{2}$ для $k=1,\ldots,n,$ а сумма $|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_n|$ равна $mn+\frac{(n-1)n}{4}$. Отметим также, что всего в турнире сыграно $\frac{20\cdot 19}{2}=190$ партий и, соответственно, разыграно 190 очков; поэтому $mn+\frac{(n-1)n}{4}=190-S$, где S – сумма очков, набранных 20-n участниками, не вошедшими в цепочку $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

При $n=20$ это равенство приобретает вид $20m+95=190$, откуда $m=4,75$. Но число набранных шахматистом очков не может быть таким.

При $n=19$ получается равенство $19m+\frac{171}{2}=190-S$, откуда $m=\frac{11}{2}-\frac{S}{19}$. Покажем, что результаты турнирных партий могли быть такими, что некоторые 19 игроков $A_1, A_2, \ldots, A_{19}$ образовали цепочку с требуемым свойством. Пусть $S=0$ (то есть оставшийся, 20-й, шахматист проиграл все свои партии), а при $1\le i,\ j\le 19$ участник A_i выиграл у A_j в том и только в том случае, если выполнено неравенство $i\ge j+10$. Легко убедиться, что тогда $|A_k|=5+\frac{k}{2}$ для $k=1,2,\ldots,19$.

Ответ: 19.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	16
Есть пример для $n=19$, а невозможность равенства $n=20$ не доказана.	+ / 2	8
Доказано, что $n\ne 20$, а пример для $n=19$ не приведён.	∓	4