

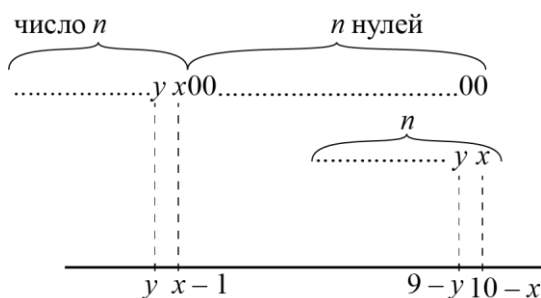
10 класс

Вариант 1

Задание 1 (10 баллов). Докажите, что для любого натурального n существует натуральное число, которое больше своей суммы цифр в $\underbrace{11 \dots 11}_n$ раз.

Решение: Условию удовлетворяет число $n(10^n - 1)$.

У числа $n(10^n - 1)$ сумма цифр равна $9n$. Убедиться в этом можно, рассмотрев десятичную запись числа $n(10^n - 1)$, получающуюся в результате вычитания $n \cdot 10^n$ и n .



(Если n оканчивается на k нулей, то будем рассматривать вместо него число $n \cdot 10^{-k}$, очевидно, что сумма цифр не поменяется. Заметим, что $10^n > n$. Если последняя цифра числа n равна x , то у $n(10^n - 1)$ последняя цифра будет $10-x$, если предпоследняя цифра y , то у $n(10^n - 1)$ предпоследняя цифра будет $9-y$ и т.д. А в начале числа $n(10^n - 1)$ будут идти цифры числа n (см. рис). Далее легко видеть, что сумма цифр $n(10^n - 1)$ будет равна $9n$.)

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые части обоснования	±	7
Приведено число $n(10^n - 1)$ без доказательства	+ / 2	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	-	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 2 (10 баллов). Решите уравнение: $2021x^3 + 2022x^2 + 2022x + 674 = 0$.

Ответ: $x = -\frac{\sqrt[3]{674}}{\sqrt[3]{1347} + \sqrt[3]{674}}$

Решение: Данное уравнение равносильно уравнению $1347x^3 + 674(x + 1)^3 = 0$, из которого и находится единственный действительный корень.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.	±	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Получено уравнение $1347x^3 + 674(x + 1)^3 = 0$, но не решено.	+ / 2	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (12 баллов). Два прямоугольника $ABCD$ и $AEFG$ имеют общую вершину A и расположены на плоскости так, что точки B, E, D и G лежат на одной прямой (в указанном порядке). Пусть прямые BC и GF пересекаются в точке T , а прямые CD и EF – в точке H . Докажите, что точки A, H и T лежат на одной прямой.

Решение. Пусть прямые CD и FG пересекаются в точке M , а прямые BC и EF – в точке N . Четырехугольники $DHEA$ и $FHCT$ вписанные (у каждого из них два противоположных угла равны 90°), следовательно, $\angle FTC = 180^\circ - \angle FHC = \angle DAE$ и $\angle DAN = \angle DEH$. Так как $\angle DMG = 90^\circ - \angle FTC = 90^\circ - \angle DAE = \angle DAG$, то четырехугольник $ADGM$ также вписанный. Поэтому $\angle DAM = \angle FGE$, значит, $\angle MAH = \angle DAM + \angle DAN = \angle FGE + \angle DEH = 90^\circ$.

Аналогично, $\angle NAH = 90^\circ$, следовательно, точки M, A и N лежат на одной прямой. Тогда H – ортоцентр треугольника TMN , а точки T, H и A лежат на его высоте.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+ / 2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2

Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

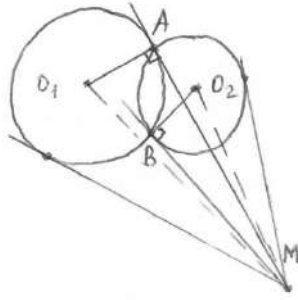
Задание 4 (12 баллов). Пусть m и n – натуральные числа. Докажите, что число $5^n + 5^m$ можно представить в виде суммы двух точных квадратов тогда и только тогда, когда число $n - m$ чётное.

Решение. Если m и n оба четны, то $m = 2k$, $n = 2l$ и $5^{2k} + 5^{2l} = (5^k)^2 + (5^l)^2$. Если m и n оба нечетны, то $m = 2k + 1$, $n = 2l + 1$ и $5^{2k+1} + 5^{2l+1} = (5^k + 2 \cdot 5^l)^2 + (5^l - 2 \cdot 5^k)^2$. Если m и n имеют разную четность, то $5^n + 5^m = 5^{2k+1} + 5^{2l} \equiv 6 \pmod{8}$. Но остатки точных квадратов по модулю 8 могут принимать лишь значения 0, 1 и 4 и остаток их суммы по модулю 8 не может быть равен 6.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Верно разобран только случай, когда m и n имеют разную четность.	+ / 2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении. За каждый из верно разобранных случаев, когда m и n оба четные или оба нечетные по 2 балла.	±	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Разобраны конкретные частные случаи числовых значений n и m .	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5 (12 баллов). Две окружности $C_1(O_1)$ и $C_2(O_2)$ с различными радиусами пересекаются в точках A и B . Касательная из точки A к C_1 пересекает касательную из точки B к C_2 в точке M . Докажите, что окружности из точки M видны под одинаковыми углами. (Говорят, что окружность видна из точки вне ее под углом α , если касательные, проведенные из этой точки к окружности, образуют угол α).

Решение.



Достаточно доказать, что $2\angle O_1MA = 2\angle O_2MB$, что равносильно $\frac{O_1A}{AM} = \frac{O_2B}{BM}$ (см. рис), $AB = 2O_1A \cdot \sin \frac{1}{2}\widehat{AB} = 2O_1A \cdot \sin \angle BAM$ вне зависимости от того, какая из дуг AB выбирается – большая или меньшая. Аналогично, $AB = 2O_2B \cdot \sin \angle ABM$, следовательно, $\frac{O_1A}{\sin \angle ABM} = \frac{O_2B}{\sin \angle BAM}$. По теореме синусов из треугольника ABM $\frac{MA}{\sin \angle ABM} = \frac{MB}{\sin \angle BAM}$. Из двух последних равенств вытекает доказываемое равенство.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+ / 2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6 (14 баллов). Пусть x_k - положительный корень уравнения $x^k - x - 1 = 0$. Докажите, что

$$x_{25} < \frac{x_{20} + x_{30}}{2}$$

Решение. $x_k^k = x_k + 1 > 1$, так как $x_k > 0$, следовательно, $x_k > 1$ и $x_k^k = x_k + 1 > 2$, т.е. $x_k > \sqrt[k]{2}$. Поэтому $\frac{x_{20} + x_{30}}{2} \geq \sqrt{x_{20}x_{30}} > \sqrt{\sqrt{20}\sqrt{30}\sqrt{2}} = \sqrt[24]{2}$, а $x_{25}^{25} = x_{25} + 1 < 2x_{25}$, то есть $x_{25}^{24} < 2$, $x_{25} < \sqrt[24]{2}$. Значит, $x_{25} < \sqrt[24]{2} < \frac{x_{20} + x_{30}}{2}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	10
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+ / 2	7

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	\mp	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов). В комнате стоят два ящика. В первом лежат n белых и m черных шаров, во втором – достаточно много черных. Из первого ящика наугад вынимают два шара. Если они одного цвета, то черный шар из второго ящика перекладывают в первый, если шары разного цвета, то белый шар возвращают в первый ящик. Так поступают до тех пор, пока в первом ящике не останется один шар. С какой вероятностью он будет белым?

Ответ: если n нечетно, то 1, а если n четно, то 0.

Решение. Четность числа шаров белого цвета в первом ящике не меняется, следовательно, последний шар будет белым тогда и только тогда, когда n нечетно.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	\pm	10
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	\mp	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Верный ответ без обоснования.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 8 (16 баллов). Клетки шахматной доски 12×12 раскрашены в 72 цвета так, что в каждый цвет покрашены ровно две клетки. Докажите, что на этой доске можно расставить 12 ладей так, чтобы они стояли на клетках разного цвета и никакие две из них не били друг друга. Две ладьи бьют друг друга, если они стоят в одной горизонтали или в одной вертикали доски.

Решение. На доске $m \times m$ можно расставить m неьющих друг друга ладей $m!$ способами (на первой горизонтали – m способов, на второй – $(m-1)$, ..., на последней – единственным способом). Пусть доказываемое утверждение неверно. Тогда, если доска раскрашена так, как в условии, то для всякой расстановки не бьющих друг друга ладей какие-то две стоят на клетках одного цвета. Следовательно, число $(2n)!$ (где $n=6$) таких расстановок не больше,

чем $2n^2(2n - 2)!$, так как пару ладей можно расставить на клетках одного цвета не более, чем $\frac{(2n)^2}{2} = 2n^2$ способами, а остальные $(2n - 2)$ ладьи - $(2n - 2)!$ способами. Итак, $(2n)! \leq 2n^2(2n - 2)!$, откуда $2n - 1 \leq n$, т.е. $n \leq 1$, что противоречит условию.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	16
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	\pm	12
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+/2	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	\mp	4
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Верный ответ без обоснования.	-	0
Задача не решалась.	0	0

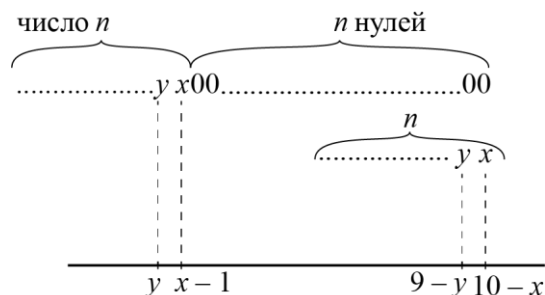
10 класс

Вариант 2

Задание 1 (10 баллов). Докажите, что для любого натурального n существует натуральное число, которое больше своей суммы цифр в $\underbrace{11 \dots 11}_n$ раз.

Решение: Условию удовлетворяет число $n(10^n - 1)$.

У числа $n(10^n - 1)$ сумма цифр равна $9n$. Убедиться в этом можно, рассмотрев десятичную запись числа $n(10^n - 1)$, получающуюся в результате вычитания $n \cdot 10^n$ и n .



(Если n оканчивается на k нулей, то будем рассматривать вместо него число $n \cdot 10^{-k}$, очевидно, что сумма цифр не поменяется. Заметим, что $10^n > n$. Если последняя цифра числа n равна x , то у $n(10^n - 1)$ последняя цифра будет $10-x$, если предпоследняя цифра y , то у $n(10^n - 1)$ предпоследняя цифра будет $9-y$ и т.д. А в начале числа $n(10^n - 1)$ будут идти цифры числа n (см. рис). Далее легко видеть, что сумма цифр $n(10^n - 1)$ будет равна $9n$.)

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые части обоснования	±	7
Приведено число $n(10^n - 1)$ без доказательства	+ / 2	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	-	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 2 (10 баллов). Решите уравнение: $2021x^3 - 2022x^2 + 2022x - 674 = 0$.

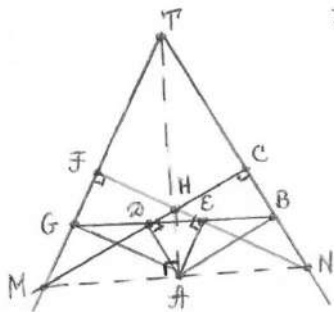
Ответ: $x = -\frac{\sqrt[3]{674}}{\sqrt[3]{1347} - \sqrt[3]{674}}$

Решение: Данное уравнение равносильно уравнению $1347x^3 + 674(x - 1)^3 = 0$, из которого и находится единственный действительный корень.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.	±	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Получено уравнение $1347x^3 + 674(x - 1)^3 = 0$, но не решено.	+ / 2	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	±	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (12 баллов). Два прямоугольника $ABCD$ и $AEFG$ имеют общую вершину A и расположены на плоскости так, что точки B, E, D и G лежат на одной прямой (в указанном порядке). Пусть прямые BC и GF пересекаются в точке T , а прямые CD и EF – в точке H . Докажите, что точки A, H и T лежат на одной прямой.

Решение.



Пусть прямые CD и FG пересекаются в точке M , а прямые BC и EF – в точке N . Четырехугольники $DHEA$ и $FHCT$ вписанные (у каждого из них два противоположных угла равны 90°), следовательно, $\angle FTC = 180^\circ - \angle FHC = \angle DAE$ и $\angle DAN = \angle DEN$. Так как $\angle DMG = 90^\circ - \angle FTC = 90^\circ - \angle DAE = \angle DAG$, то четырехугольник $ADGM$ также вписанный. Поэтому $\angle DAM = \angle FGE$, значит, $\angle MAH = \angle DAM + \angle DAN = \angle FGE + \angle DEN = 90^\circ$.

Аналогично, $\angle NAH = 90^\circ$, следовательно, точки M, A и N лежат на одной прямой. Тогда H – ортоцентр треугольника TMN , а точки T, H и A лежат на его высоте.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+ / 2	6

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	±	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

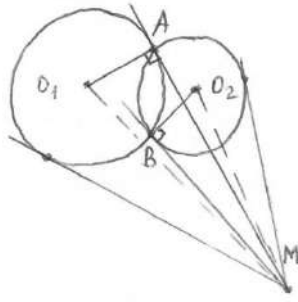
Задание 4 (12 баллов). Пусть m и n – натуральные числа. Докажите, что число $5^n + 5^m$ можно представить в виде суммы двух точных квадратов тогда и только тогда, когда число $n - m$ чётное.

Решение. Если m и n оба четны, то $m = 2k$, $n = 2l$ и $5^{2k} + 5^{2l} = (5^k)^2 + (5^l)^2$. Если m и n оба нечетны, то $m = 2k + 1$, $n = 2l + 1$ и $5^{2k+1} + 5^{2l+1} = (5^k + 2 \cdot 5^l)^2 + (5^l - 2 \cdot 5^k)^2$. Если m и n имеют разную четность, то $5^n + 5^m = 5^{2k+1} + 5^{2l} \equiv 6 \pmod{8}$. Но остатки точных квадратов по модулю 8 могут принимать лишь значения 0, 1 и 4 и остаток их суммы по модулю 8 не может быть равен 6.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Верно разобран только случай, когда m и n имеют разную четность.	+ / 2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении. За каждый из верно разобранных случаев, когда m и n оба четные или оба нечетные по 2 балла.	±	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Разобраны конкретные частные случаи числовых значений n и m .	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5 (12 баллов). Две окружности $C_1(O_1)$ и $C_2(O_2)$ с различными радиусами пересекаются в точках A и B . Касательная из точки A к C_1 пересекает касательную из точки B к C_2 в точке M . Докажите, что окружности из точки M видны под одинаковыми углами. (Говорят, что окружность видна из точки вне ее под углом α , если касательные, проведенные из этой точки к окружности, образуют угол α).

Решение.



Достаточно доказать, что $2\angle O_1MA = 2\angle O_2MB$, что равносильно $\frac{O_1A}{AM} = \frac{O_2B}{BM}$ (см. рис), $AB = 2O_1A \cdot \sin \frac{1}{2}\widehat{AMB} = 2O_1A \cdot \sin \angle BAM$ вне зависимости от того, какая из дуг AB выбирается – большая или меньшая. Аналогично, $AB = 2O_2B \cdot \sin \angle ABM$, следовательно, $\frac{O_1A}{\sin \angle ABM} = \frac{O_2B}{\sin \angle BAM}$. По теореме синусов из треугольника ABM $\frac{MA}{\sin \angle ABM} = \frac{MB}{\sin \angle BAM}$. Из двух последних равенств вытекает доказываемое равенство.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+ / 2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6 (14 баллов). Пусть x_k - положительный корень уравнения $x^k - x - 1 = 0$. Докажите, что

$$x_{16} < \frac{x_{10} + x_{40}}{2}$$

Решение. $x_k^k = x_k + 1 > 1$, так как $x_k > 0$, следовательно, $x_k > 1$ и $x_k^k = x_k + 1 > 2$, т.е. $x_k > \sqrt[k]{2}$. Поэтому $\frac{x_{10} + x_{40}}{2} \geq \sqrt{x_{10}x_{40}} > \sqrt{\sqrt[10]{2} \sqrt[40]{2}} = \sqrt[16]{2}$, а $x_{17}^{17} = x_{17} + 1 < 2x_{17}$, то есть $x_{17}^{16} < 2$, $x_{17} < \sqrt[16]{2}$. Значит, $x_{17} < \sqrt[16]{2} < \frac{x_{10} + x_{40}}{2}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	10
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+ / 2	7

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	\mp	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов). В комнате стоят два ящика. В первом лежат n белых и m черных шаров, во втором – достаточно много белых. Из первого ящика наугад вынимают два шара. Если они одного цвета, то белый шар из второго ящика перекладывают в первый; если шары разного цвета, то черный шар возвращают в первый ящик. Так поступают до тех пор, пока в первом ящике не останется один шар. С какой вероятностью он будет белым?

Ответ: если n четно, то 1, а если n нечетно, то 0.

Решение. Четность числа шаров черного цвета в первом ящике не меняется, следовательно, последний шар будет белым тогда и только тогда, когда n четно.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	\pm	10
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	\mp	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Верный ответ без обоснования.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 8 (16 баллов). Клетки шахматной доски 10×10 раскрашены в 50 цветов так, что в каждый цвет покрашены ровно две клетки. Докажите, что на этой доске можно расставить 10 ладей так, чтобы они стояли на клетках разного цвета и никакие две из них не били друг друга. Две ладьи бьют друг друга, если они стоят в одной горизонтали или в одной вертикали доски.

Решение. На доске $m \times m$ можно расставить m неьющих друг друга ладей $m!$ способами (на первой горизонтали – m способов, на второй – $(m-1)$, ..., на последней – единственным способом). Пусть доказываемое утверждение неверно. Тогда, если доска раскрашена так, как в условии, то для всякой расстановки не бьющих друг друга ладей какие-то две стоят

на клетках одного цвета. Следовательно, число $(2n)!$ (где $n=5$) таких расстановок не больше, чем $2n^2(2n-2)!$, так как пару ладей можно расставить на клетках одного цвета не более, чем $\frac{(2n)^2}{2} = 2n^2$ способами, а остальные $(2n-2)$ ладьи - $(2n-2)!$ способами. Итак, $(2n)! \leq 2n^2(2n-2)!$, откуда $2n-1 \leq n$, т.е. $n \leq 1$, что противоречит условию.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	16
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	\pm	12
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+/2	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	\mp	4
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Верный ответ без обоснования.	-	0
Задача не решалась.	0	0