ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2020-2021 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

10 класс

Вариант 1

Задание 1 (10 баллов)

Какую клетку доски размера 9×9 можно вырезать так, чтобы оставшуюся часть доски можно было бы замостить прямоугольными плитками размера 1×5?

Задание 2 (10 баллов)

На финансовом рынке начали работать тридцать мелких банков. Каждый из них может укрупняться, купив любой другой банк. Банк считается крупным, если он сумел купить не менее трех других (мелких или крупных) банков. Считается, что если крупный банк был куплен другим банком, то он по-прежнему остается крупным. Купленный банк повторно не продается.

Какое наибольшее количество банков смогут стать крупными?

Задание 3 (12 баллов)

В 1995 году создатель Шнобелевской премии Марк Абрахамс начал выпускать журнал «Анналы невероятных исследований». Этот журнал выходит нерегулярно, но не реже, чем 5 раз за 3 года. Докажите, что если журнал будет издаваться в таком режиме достаточно долго, то когда-нибудь его порядковый номер (выпуски нумеруются подряд, начиная с первого номера) совпадет с годом его выпуска.

Задание 4 (12 баллов)

Двое по очереди бросают симметричную монету (вероятности выпадения орла и решки одинаковы). Тот, у кого первым выпадает орёл, выигрывает партию. Каковы вероятности выигрыша каждого из них?

Задание 5 (12 баллов)

Докажите, что для любых целых чисел a и b существуют целые числа x и y такие, что $x^2 + xy + y^2 = 3a^2 + b^2$.

Задание 6. (14 баллов)

Пусть AM и BN − высоты остроугольного треугольника ABC, в котором $\angle C > 45°$. На отрезках AM и BN отмечены соответственно точки K и T так, что $MK = MB$ и $NT = NA$. Докажите, что прямые MN и KT параллельны.

Задание 7 (14 баллов)

Решите уравнение

$$x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{1+x^2}.$$

Задача 8 (16 баллов)

Дана трапеция $ABCD$, у которой $AB=BC=CD=\frac{1}{2}AD$. Докажите, что для любой точки X внутри трапеции справедливо неравенство $XD-XA-XB\leq CD$.

ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2020-2021 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

10 класс

Вариант 2

Задание 1 (10 баллов)

Какую клетку доски размера 7×7 можно вырезать так, чтобы оставшуюся часть доски можно было бы замостить прямоугольными плитками размера 1×4?

Задание 2 (10 баллов)

На финансовом рынке начали работать сорок мелких банков. Каждый из них может укрупняться, купив любой другой банк. Банк считается крупным, если он сумел купить не менее четырех других (мелких или крупных) банков. Считается, что если крупный банк был куплен другим банком, то он по-прежнему остается крупным. Купленный банк повторно не продается.

Какое наибольшее количество банков смогут стать крупными?

Задание 3 (12 баллов)

В 1995 году создатель Шнобелевской премии Марк Абрахамс начал выпускать журнал «Анналы невероятных исследований». Этот журнал выходит нерегулярно, но не реже, чем 4 раза за 3 года. Докажите, что если журнал будет издаваться в таком режиме достаточно долго, то когда-нибудь его порядковый номер (выпуски нумеруются подряд, начиная с первого номера) совпадет с годом его выпуска.

Задание 4 (12 баллов)

Двое по очереди бросают симметричный кубик (вероятности выпадения всех граней одинаковы). Тот, у кого первым выпадает шестерка, выигрывает партию. Каковы вероятности выигрыша каждого из них?

Задание 5 (12 баллов)

Докажите, что для любых целых чисел a и b существуют целые числа x и y такие, что $x^2 - xy + y^2 = a^2 + 3b^2$.

Задание 6. (14 баллов)

Пусть AM и BN — высоты остроугольного треугольника ABC, в котором $\angle C < 45°$. На отрезках AM и BN отмечены соответственно точки K и T так, что $MK = MB$ и $NT = NA$. Докажите, что прямые MN и KT параллельны.

Задание 7 (14 баллов)

Решите уравнение

$$x\sqrt{x} + \sqrt{4 - x} = 2\sqrt{1 + x^2}.$$

Задача 8 (16 баллов)

Дана трапеция $ABCD$, у которой $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$. Докажите, что для любой точки X за пределами трапеции справедливо неравенство $XD - XA - XB \leq CD$.