



ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Вариант 1

Задание 1 (10 баллов)

При оптимизации штатного расписания в учреждении было сокращено 13 вакансий, в результате чего их доля в расписании снизилась на 13 процентных пунктов. Зная, что вакансии в этом учреждении еще остались, определите их количество.

Решение.

Пусть в учреждении было $m + 13$, а осталось $m > 0$ вакансий. Тогда, если n – число работающих, то имеем уравнение $\frac{m+13}{m+n+13} - \frac{m}{m+n} = \frac{13}{100}$, преобразующееся к виду:

$$(m + n)(m + n + 13) = 100 \cdot n.$$

Отсюда ясно, что $(m + n)$ и $(m + n + 13)$ – натуральные числа, меньшие 100. Причем, одно из них кратно 25, а другое 4. Перебором устанавливаем, что $m + n = 12$ либо $m + n = 75$. В первом случае $n = \frac{12 \cdot (12+13)}{100} = 3$, а во втором: $n = \frac{75 \cdot (75+13)}{100} = 66$.

Число оставшихся вакансий m в обоих случаях равно 9.

Ответ: 9 – число оставшихся вакансий.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но перебор проведен не до конца: не доказано, что других решений нет.	±	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Составлены верные соотношения, связывающие m и n , но дальше продвижений нет.	+/2	3

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит угаданную пару m и n	$\mp$	1 балл за каждую пару
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	—	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 2 (10 баллов)

Какие линейные размеры может иметь прямоугольный параллелепипед, если его объем равен 200 см^3 , площадь полной поверхности равна 300 см^2 , а периметр основания равен 50 см ?

Решение.

Пусть x_1 , x_2 и x_3 — линейные размеры параллелепипеда (в сантиметрах). Тогда система уравнений $x_1 x_2 x_3 = 200$, $2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = 300$ и $2(x_1 + x_2) = 50$ может быть решена, например, через разложение для кубического многочлена $x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)x - x_1 x_2 x_3 = 0$, как уравнение

$$x^3 - (25 + x_3)x^2 + 150x - 200 = 0,$$

которому удовлетворяют все ребра параллелипипеда x_1 , x_2 и x_3 .

Подстановка $x = x_3$ приводит к квадратному уравнению $-25x_3^2 + 150x_3 - 200 = 0$ с корнями $x_3 = 2$ и $x_3 = 4$. Тогда для каждого из найденных x_3 получаем:

При $x_3 = 2$: $x^3 - 27x^2 + 150x - 200 = (x - 2)(x^2 - 25x + 100) = 0$ с корнями $x_1 = 5$ и $x_2 = 20$.

При $x_3 = 4$: $x^3 - 29x^2 + 150x - 200 = (x - 4)(x^2 - 25x + 50) = 0$ с корнями

$$x_1 = \frac{25+5\sqrt{17}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{25-5\sqrt{17}}{2}.$$

Ответ: $2 \text{ см} \times 5 \text{ см} \times 20 \text{ см}$ и $4 \text{ см} \times \frac{25-5\sqrt{17}}{2} \text{ см} \times \frac{25+5\sqrt{17}}{2} \text{ см}$

(с точностью до порядка следования)

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10

Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки/арифметической ошибки получен неверный ответ	$\pm$	7
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но найден только один вариант линейных размеров.	+ / 2	4
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит формулировку верной системы уравнений.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (12 баллов)

Решите уравнение $\frac{\sin^4 \varphi}{\sin^2 x} + \frac{\cos^4 \varphi}{\cos^2 x} = 1$ при всех значениях параметра φ .

Решение.

ОДЗ уравнения определяется условием $\sin^2 x \cdot \cos^2 x \neq 0$, т.е. $x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Введем $a = \sin^2 \varphi$ и $t = \sin^2 x$. После подстановки получим:

$$\frac{\sin^4 \varphi}{\sin^2 x} + \frac{\cos^4 \varphi}{\cos^2 x} = \frac{a^2}{t} + \frac{(1-a)^2}{1-t} = \frac{a^2(1-t) + (1-a)^2 t}{t(1-t)} = \frac{a^2 - 2at + t}{t - t^2} = \frac{(a-t)^2 + t - t^2}{t - t^2} = 1.$$

Следовательно, $a = t \Leftrightarrow \sin^2 \varphi = \sin^2 x \Leftrightarrow x = \pm \varphi + \pi n, n \in Z$.

При $\varphi \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z$ решение x принадлежит ОДЗ уравнения, а при $\varphi = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$ решений нет.

Ответ: При $\varphi \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z$ решение $x = \pm \varphi + \pi n, n \in Z$; при $\varphi = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$ решений нет.

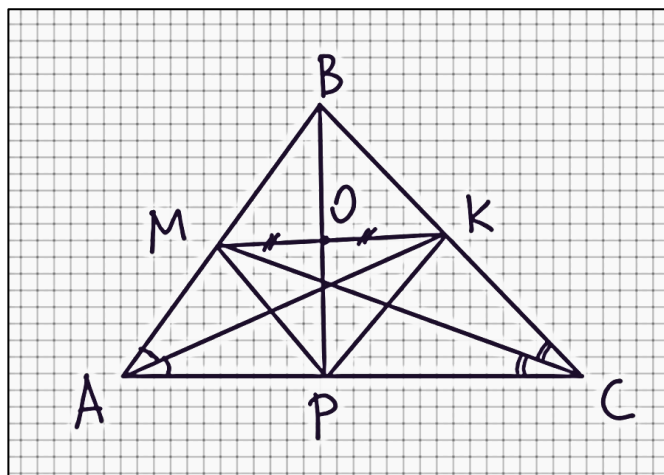
Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12

Ответ и решение верные, но форма ответа слишком громоздка	$\pm$	11
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Найдены значения x , но не выписано в явном виде условие $\varphi \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$, хотя уравнение на ОДЗ имеется.	$+/-$	10
При правильном решении и верном выражении для x ошибочно указано ОДЗ.	$\mp$	6
Получено уравнение $\sin^2 \varphi = \sin^2 x$, но не решено или решено неверно.	$-$	2-3
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Задача не решалась.	0	0

Задание 4 (12 баллов)

В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и CM . Известно, что середины отрезков AB , BC и MK лежат на одной прямой. Найдите AB , если $BK = 4$, а $KC = 5$.

Решение.



По свойству биссектрисы AK : $\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{KC} = \frac{4}{5}$ и биссектрисы CM : $\frac{BC}{AC} = \frac{MB}{AM}$.

Пусть $t. O$ — середина отрезка MK , а $t. P$ — точка пересечения прямых BO и AC . Заметим, что из условия следует, что $t. O$ лежит на средней линии $\triangle ABC$ параллельной AC . Следовательно, по теореме Фалеса $BO = OP$ и четырехугольник $MBKP$ — параллелограмм (диагонали пересекаются и делятся точкой пересечения пополам).

Ещё дважды применяя теорему Фалеса, получим $\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PC} = \frac{BK}{KC} = \frac{4}{5}$, откуда

$$AB = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot (4 + 5) = \frac{144}{25} = 5,76$$

Ответ: $\frac{144}{25} = 5,76$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Задача решена полностью, однако ответ содержит арифметическую ошибку или опisku.	$\pm$	8
Представлен верный ответ, но имеются неточности обоснования	+/-	6
Имеется значительное продвижение при решении задачи, однако ответ не получен.		
Имеется определенное продвижение в задаче, однако оно далеко от настоящего.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	—	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5 (12 баллов)

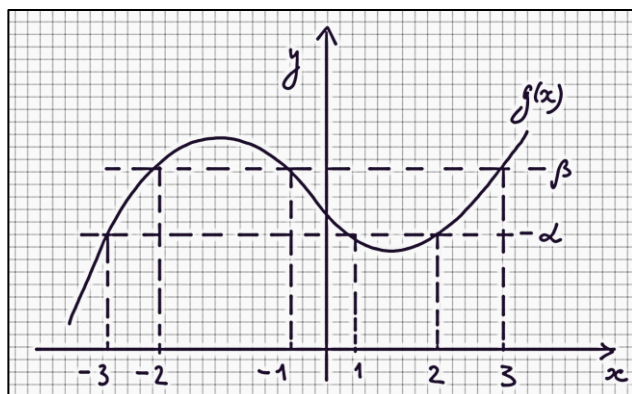
Приведите пример квадратного многочлена $f(x)$ и кубического многочлена $g(x)$ таких, что уравнению $f(g(x)) = 0$ удовлетворяют числа ± 1 ; ± 2 и ± 3 .

Решение.

Будем искать такие $f(x)$ и $g(x)$ для которых выполняется

$$f(g(x)) = (g(x) - \alpha)(g(x) - \beta),$$

причем, $\alpha = g(-3) = g(1) = g(2)$, а $\beta = g(-2) = g(-1) = g(3)$ (см. рисунок),



где $g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$. Система уравнений

$$\begin{cases} g(-3) = g(1) = g(2) \\ g(-2) = g(-1) = g(3) \end{cases}$$

оказывается недоопределенной и эквивалентна $q = 0$ и $r = -7p$. Тогда для получения примера функции $g(x)$ достаточно положить $p = 1$ и $s = 0$. В итоге $g(x) = x^3 + 0x^2 - 7x + 0$, $\alpha = -6$, $\beta = 6$, $f(x) = (x + 6)(x - 6) = x^2 - 36$.

Ответ: $f(x) = x^2 - 36$, а $g(x) = x^3 - 7x$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или допущена арифметическая ошибка	$\pm$	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Верно сформулирована система уравнений, приводящая к ответу, но ответ не получен.	+/2	6
Решение незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	—	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6. (14 баллов)

Около шара радиуса 1 описана правильная n -угольная призма, все ребра которой касаются некоторого другого шара. Докажите, что $n = 4$ и найдите объем этой призмы.

Решение.

Высота призмы и боковое ребро равны 2 (диаметру вписанного шара). Основания призмы являются правильными n -угольниками, описанными около окружностей радиуса 1. Согласно известной формуле, сторона основания в этом случае равна $2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$. Поверхность шара, касающегося рёбер призмы, пересекает каждую из граней по окружности. Это значит, что прямоугольники, служащие боковыми гранями, — описанные, а потому являются квадратами. Отсюда $2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = 2$ и $n = 4$.

Таким образом, призма представляет собой куб $2 \times 2 \times 2$.

Ответ: $V = 8$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи содержит верные рассуждения, но ответ дан с арифметической ошибкой (опиской).	$\pm$	11
Доказано $n = 4$, но искомый объем не найден		
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено.	+/-	4
Решение содержит верный ответ, но $n = 4$ не доказано.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	—	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов)

Найдите множество значений функции $y = \log_{2x-1} x$.

Решение.

ОДЗ функции: $x > \frac{1}{2}$, $x \neq 1$. Пропотенцируем уравнение $y = \log_{2x-1} x$ по основанию логарифма: $(2x - 1)^y = x$ и, переобозначив $z = 2x - 1$, получим

$$z^y = \frac{1}{2}(z + 1) \text{ при } z > 0, \quad z \neq 1.$$

Выясним при каких y данное уравнение имеет решение, удовлетворяющее $z > 0$, $z \neq 1$.

Сразу исключим два очевидных случая $y \leq 0$ и $y \geq 1$ (см. рисунок 1.).

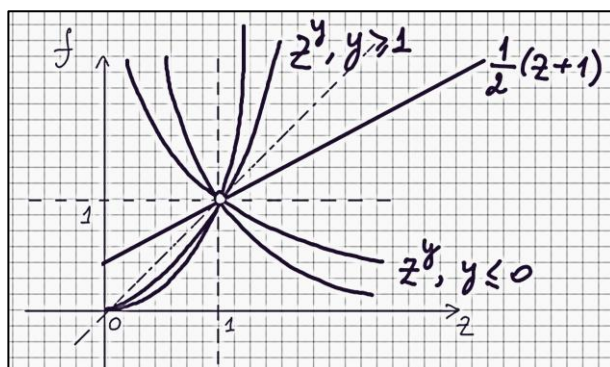


Рис.1

Остается рассмотреть вариант $0 < y < 1$.

Заметим, что левая часть уравнения z^y для указанных степеней y является выпуклой вверх функцией, т.к. $(z^y)'' = y(y-1)z^{y-2} < 0$. Это значит, что её график лежит строго ниже любой касательной к нему (кроме точки касания) и для случая, когда правая часть уравнения $\frac{1}{2}(z+1)$ является касательной к графику при $y = \frac{1}{2}$, уравнение $z^y = \frac{1}{2}(z+1)$ корней среди $z > 0, z \neq 1$ не имеет.

Во всех оставшихся случаях z^y будет пересекаться с прямой $\frac{1}{2}(z+1)$ при $z > 0, z \neq 1$ (см. рисунки 2 – 3).

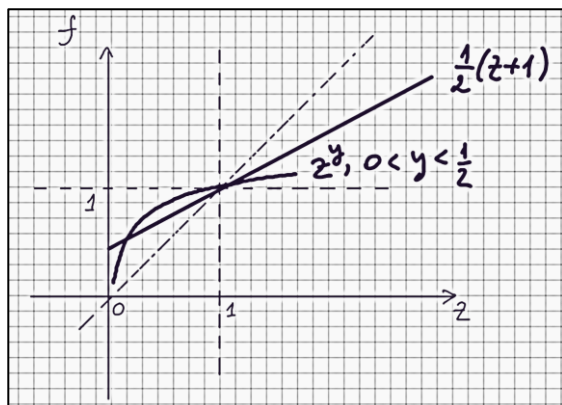


Рис.2

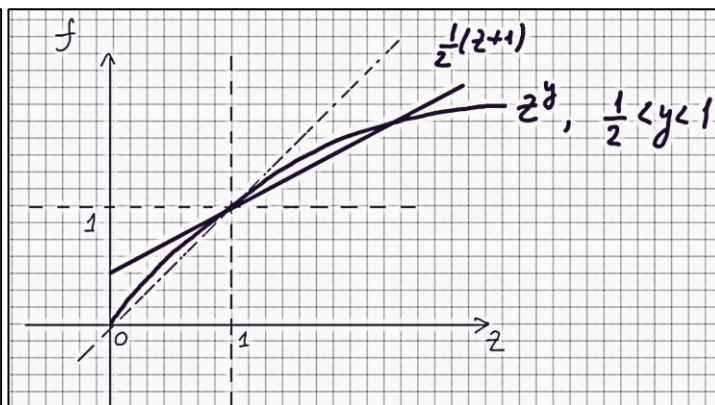


Рис.3

Действительно, в случае $0 < y < \frac{1}{2}$ (рис. 2) касательная, проведенная к z^y в точке $z = 1$, оказывается в некоторой левой окрестности точки касания выше прямой $\frac{1}{2}(z+1)$, а следовательно, и сам график z^y находится выше прямой $\frac{1}{2}(z+1)$ в некоторой (возможно меньшей) левой окрестности точки $z = 1$. Однако, в точке $z = 0$ функция z^y обнуляется и её график становится уже ниже прямой $\frac{1}{2}(z+1)$. В силу непрерывности обеих функций строго внутри интервала $(0, 1)$ найдется точка пересечения их графиков.

В случае $\frac{1}{2} < y < 1$ (рис. 3) будет наблюдаться аналогичная ситуация: в некоторой правой окрестности точки касания $z = 1$ график z^y находится выше прямой $\frac{1}{2}(z + 1)$. Однако, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{z^y}{\frac{1}{2}(z+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2z^{y-1} = 0$, следовательно, рано или поздно график функции z^y станет ниже прямой $\frac{1}{2}(z + 1)$, и в силу непрерывности обеих функций на луче $(1, +\infty)$ найдется точка пересечения их графиков.

Ответ: $y \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит обоснованную схему, но найден интервал $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$\pm$	10
Решение задачи, содержит обоснованную схему, но найден интервал $\left(0, \frac{1}{2}\right)$	+/-	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении. Ответ отсутствует или неверный.	$\mp$	3
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.		
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	—	0
Задача не решалась.	0	0

Задача 8 (16 баллов)

Пекарня планирует перейти на округление чеков в меньшую сторону (покупатель будет платить p рублей за товар ценой в p рублей с копейками). В связи с этим коммерческий директор выбрал 100 чеков и подсчитал, что выручка при таком округлении снизилась бы на 1%. Известно, что чеков на сумму менее 10 рублей не

было, и что все цены в пекарне кратны 10 копейкам. Каким наибольшим (среди этих чеков) могло быть количество чеков на сумму более 100 рублей каждый?

Решение.

Чек на сумму более 100 рублей будем называть *большим*. Заметим, что при округлении одного чека пекарня теряет не более 90 коп., а при округлении 100 чеков – не более 90 руб. Поэтому чеки были выбраны на общую сумму, не превышавшую 9000 руб.

Пусть ровно n чеков из выбранных были *большими*. Тогда при округлении всех 100 чеков пекарня получила бы не меньше, чем $100 \cdot n + 10 \cdot (100 - n) = 90 \cdot n + 1000$ рублей. Следовательно, без округления получено не меньше, чем

$$\frac{90 \cdot n + 1000}{0,99} = \frac{100 \cdot (90 \cdot n + 1000)}{99} \text{ руб. Наибольшее целое, удовлетворяющее неравенству}$$

$\frac{100 \cdot (90 \cdot n + 1000)}{99} < 9000$, равно 87. И оно, действительно, могло быть реализовано на чеках. Например, при 87 чеках на сумму 100,9 руб. каждый, 12 чеках на сумму 16,9 руб. каждый и одном чеке на сумму 18,9 руб.

Ответ: $n = 87$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	16
Доказана верхняя оценка $n \leq 87$, но пример не приведен	+	13
Есть пример на $n = 87$, но максимальность такого набора не доказана	$\pm$	5
Доказана только верхняя оценка на сумму чеков, не превышающая 9000	+/-	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	—	0
Задача не решалась.	0	0



ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Вариант 2

Задание 1 (10 баллов)

Когда в фирму пришел новый сотрудник, доля сотрудников с экономическим образованием там возросла на 1 процентный пункт. Сколько же теперь сотрудников в этой фирме имеют экономическое образование?

Решение.

Пусть в фирме было m , а стало $m + 1$ сотрудников с экономическим образованием. Тогда, если n – число остальных сотрудников, то имеем уравнение $\frac{m+1}{m+n+1} - \frac{m}{m+n} = \frac{1}{100}$, преобразующееся к виду:

$$(m + n)(m + n + 1) = 100 \cdot n.$$

Отсюда ясно, что $(m + n)$ и $(m + n + 1)$ – натуральные числа, меньшие 100. Причем, одно из них кратно 25, а другое 4. Перебором устанавливаем, что $m + n = 24$ либо $m + n = 75$. В первом случае $n = \frac{24 \cdot (24+1)}{100} = 6$, а во втором: $n = \frac{75 \cdot (75+1)}{100} = 57$.

Число $m + 1$ в обоих случаях равно 19.

Ответ: В фирме стало 19 сотрудников с экономическим образованием.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но перебор проведен не до конца: не доказано, что других решений нет.	$\pm$	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Составлены верные соотношения, связывающие m и n , но дальше продвижений нет.	+/2	3

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит угаданную пару m и n	$\mp$	1 балл за каждую пару
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	—	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 2 (10 баллов)

Какие линейные размеры может иметь прямоугольный параллелепипед, если его объем равен 240 см^3 , площадь боковой поверхности равна 220 см^2 , а сумма длин всех ребер составляет 84 см ?

Решение.

Пусть x_1 , x_2 и x_3 — линейные размеры параллелепипеда (в сантиметрах). Тогда имеем систему уравнений $x_1 x_2 x_3 = 240$, $2(x_1 x_3 + x_2 x_3) = 220$ и $4(x_1 + x_2 + x_3) = 84$.

Из последних двух уравнений легко выражается x_3 : $x_3^2 - 21x_3 + 110 = 0$.

Откуда $x_3 = 10$ и $x_3 = 11$. Последующие подстановки найденного приводят для случая $x_3 = 10$ к корням $x_1 = 3$ и $x_2 = 8$;

для случая $x_3 = 11$ к корням $x_1 = 5 + \sqrt{\frac{35}{11}}$ и $x_2 = 5 - \sqrt{\frac{35}{11}}$.

Ответ: $3 \text{ см} \times 8 \text{ см} \times 10 \text{ см}$ и $11 \text{ см} \times \left(5 - \sqrt{\frac{35}{11}}\right) \text{ см} \times \left(5 + \sqrt{\frac{35}{11}}\right) \text{ см}$

(с точностью до порядка следования)

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки/арифметической ошибки получен неверный ответ	$\pm$	7

Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но найден только один вариант линейных размеров.	+/2	4
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит формулировку верной системы уравнений.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	—	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (12 баллов)

Решите уравнение $\frac{\cos^4 \varphi}{\sin^2 x} + \frac{\sin^4 \varphi}{\cos^2 x} = 1$ при всех значениях параметра φ .

Решение.

ОДЗ уравнения определяется условием $\sin^2 x \cdot \cos^2 x \neq 0$, т.е. $x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Введем $a = \cos^2 \varphi$ и $t = \sin^2 x$. После подстановки получим:

$$\frac{\cos^4 \varphi}{\sin^2 x} + \frac{\sin^4 \varphi}{\cos^2 x} = \frac{a^2}{t} + \frac{(1-a)^2}{1-t} = \frac{a^2(1-t) + (1-a)^2 t}{t(1-t)} = \frac{a^2 - 2at + t}{t - t^2} = \frac{(a-t)^2 + t - t^2}{t - t^2} = 1.$$

Следовательно, $a = t \Leftrightarrow \cos^2 \varphi = \sin^2 x \Leftrightarrow x = \pm \varphi + \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

При $\varphi \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ решение x принадлежит ОДЗ уравнения, а при $\varphi = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ решений нет.

Ответ: При $\varphi \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ решение $x = \pm \varphi + \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; при $\varphi = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ решений нет.

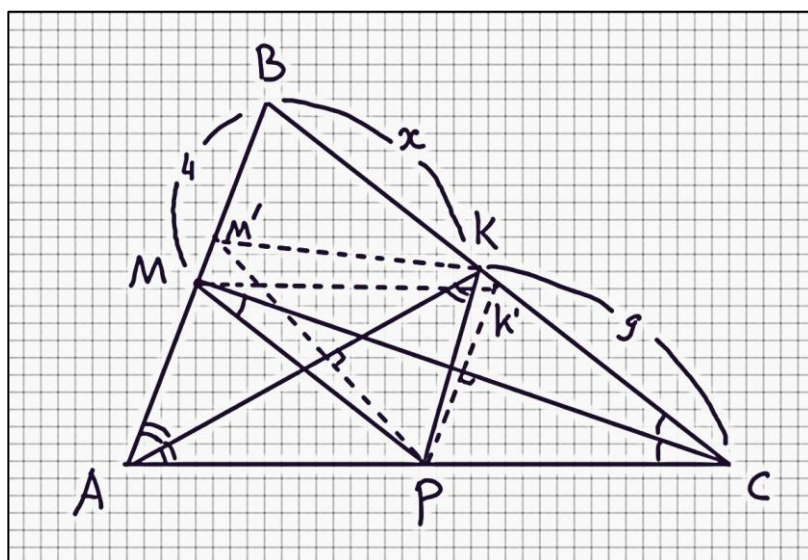
Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Ответ и решение верные, но форма ответа слишком громоздка	$\pm$	11
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Найдены значения x , но не	+/2	10

выписано в явном виде условие $\varphi \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z$, хотя уравнение на ОДЗ имеется.		
При правильном решении и верном выражении для x ошибочно указано ОДЗ.	$\mp$	6
Получено уравнение $\cos^2 \varphi = \sin^2 x$, но не решено или решено неверно.	—	2-3
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Задача не решалась.	0	0

Задание 4 (12 баллов)

Серединные перпендикуляры, проведенные к биссектрисам AK и CM треугольника ABC , пересекаются на стороне AC . Найдите AC , если $BM = 4$, а $KC = 9$.

Решение.



Пусть точка P — общая точка серединных перпендикуляров, а точки K' и M' точки пересечения этих перпендикуляров со сторонами BC и AB соответственно. Нетрудно заметить, что четырехугольник $CPMK'$ является параллелограммом (диагонали пересекаясь делятся пополам). Отсюда получаем $MP \parallel BC$ и $\angle CMP = \angle KCM = \angle MCP$, что в свою очередь доказывает равнобедренность треугольника CPM с равенством $CP = MP$.

Аналогично рассуждая с четырехугольником $APKM'$ приходим к $KP \parallel AB$ и равнобедренности треугольника APK с равенством $AP = KP$.

Далее замечаем, что четырехугольник $MBKP$ также является параллелограммом (параллельность противоположных сторон по доказанному выше), что позволяет записать равенства, введя $x = BK$: $CP = MP = BK = x$ и $AP = KP = BM = 4$.

В заключение замечаем, что треугольники ABC и AMP подобны (по трем углам, т.к. $MP \parallel BC$), что дает равенство $\frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}$ или после подстановки значений $\frac{4}{4+x} = \frac{x}{x+9}$, эквивалентное уравнению $x^2 = 36$, откуда $x = 6$ и искомая сторона $AC = 4 + 6 = 10$.

Ответ: $AC = 10$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Задача решена полностью, однако ответ содержит арифметическую ошибку или опisku.	$\pm$	8
Представлен верный ответ, но имеются неточности обоснования	+/-	6
Имеется значительное продвижение при решении задачи, однако ответ не получен.		
Имеется определенное продвижение в задаче, однако оно далеко от настоящего.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	—	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5 (12 баллов)

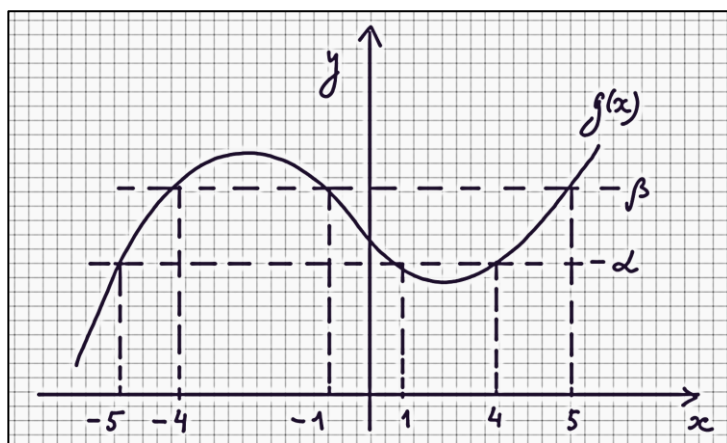
Приведите пример квадратного многочлена $f(x)$ и кубического многочлена $g(x)$ таких, что уравнению $f(g(x)) = 0$ удовлетворяют числа ± 1 ; ± 4 и ± 5 .

Решение.

Будем искать такие $f(x)$ и $g(x)$ для которых выполняется

$$f(g(x)) = (g(x) - \alpha)(g(x) - \beta),$$

причем, $\alpha = g(-5) = g(1) = g(4)$, а $\beta = g(-4) = g(-1) = g(5)$ (см. рисунок),



где $g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$. Система уравнений

$$\begin{cases} g(-5) = g(1) = g(4) \\ g(-4) = g(-1) = g(5) \end{cases}$$

оказывается недоопределенной и эквивалентна $q = 0$ и $r = -21p$. Тогда для получения примера функции $g(x)$ достаточно положить $p = 1$ и $s = 0$. В итоге $g(x) = x^3 + 0x^2 - 21x + 0$, $\alpha = -20$, $\beta = 20$, $f(x) = (x + 20)(x - 20) = x^2 - 400$.

Ответ: $f(x) = x^2 - 400$, а $g(x) = x^3 - 21x$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или допущена арифметическая ошибка	$\pm$	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Верно сформулирована система уравнений, приводящая к ответу, но ответ не получен.	+2	6
Решение незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	—	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6. (14 баллов)

Все рёбра правильной n -угольной усеченной пирамиды, описанной около сферы σ , касаются сферы ω с центром в центре нижнего основания этой пирамиды. Докажите, что $n = 3$ и найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания.

Решение.

Пусть точки O и O_1 — центры нижнего и верхнего оснований соответственно, AA_1B_1B — одна из боковых граней ($A_1B_1 \parallel AB$), M и M_1 — середины ребер AB и A_1B_1 этой пирамиды. Тогда $MM_1 = OM + O_1M_1$ (как отрезки двух касательных к сфере σ) и $AA_1 = AM + A_1M_1$ (как отрезки двух касательных к сфере ω).

При этом $\frac{OM}{AM} = \frac{O_1M_1}{A_1M_1} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$, откуда $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = \frac{MM_1}{AA_1} < 1$ (" < 1 " поскольку апофема короче бокового ребра). Следовательно, $n < 4$, т.е. $n = 3$.

Искомый угол — это $\angle OAA_1$. Из равенства прямоугольных треугольников OAM и OAP (где $P \in AA_1$ и $OP \perp AA_1$) имеем: $\angle OAA_1 = \angle OAP = \angle OAM = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи содержит верные рассуждения, но ответ дан с арифметической ошибкой (опиской).	$\pm$	11
Доказано $n = 3$, но искомый угол не найден		
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено.	+/-	4
Решение содержит верный ответ, но $n = 3$ не доказано.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	—	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов)

Найдите множество значений функции $y = \log_{3x+1}(x + 1)$.

Решение.

ОДЗ функции: $x > -\frac{1}{3}$, $x \neq 0$. Пропотенцируем уравнение $y = \log_{3x+1}(x+1)$ по основанию логарифма: $(3x+1)^y = x+1$ и, переобозначив $z = 3x+1$, получим эквивалентную связь

$$z^y = \frac{1}{3}(z+2) \text{ при } z > 0, z \neq 1.$$

Выясним при каких y данное уравнение имеет решение, удовлетворяющее $z > 0$, $z \neq 1$.

Сразу исключим два очевидных случая $y \leq 0$ и $y \geq 1$ (см. рисунок 1.).

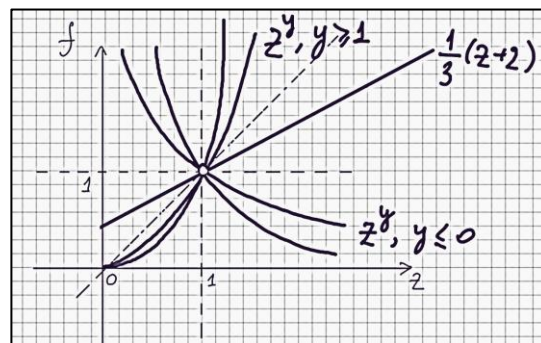


Рис.1

Остается рассмотреть вариант $0 < y < 1$.

Заметим, что левая часть уравнения z^y для указанных степеней является выпуклой вверх функцией, т.к. $(z^y)'' = y(y-1)z^{y-2} < 0$. Это значит, что её график лежит строго ниже любой касательной к нему (кроме точки касания) и для случая, когда правая часть уравнения $\frac{1}{3}(z+2)$ является касательной к графику при $y = \frac{1}{3}$, уравнение $z^y = \frac{1}{3}(z+2)$ корней среди $z > 0$, $z \neq 1$ не имеет.

Во всех оставшихся случаях z^y будет пересекаться с прямой $\frac{1}{3}(z+2)$ при $z > 0$, $z \neq 1$ (см. рисунки 2 – 3).

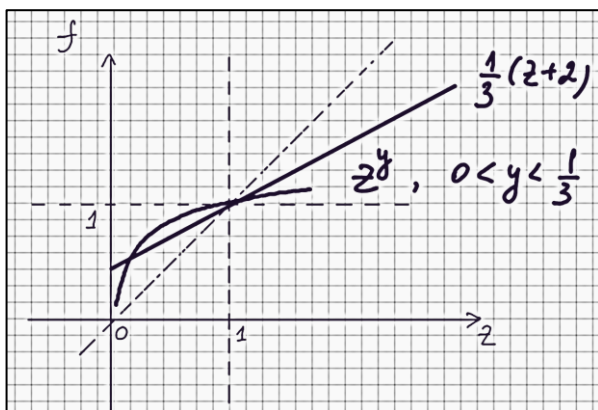


Рис.2

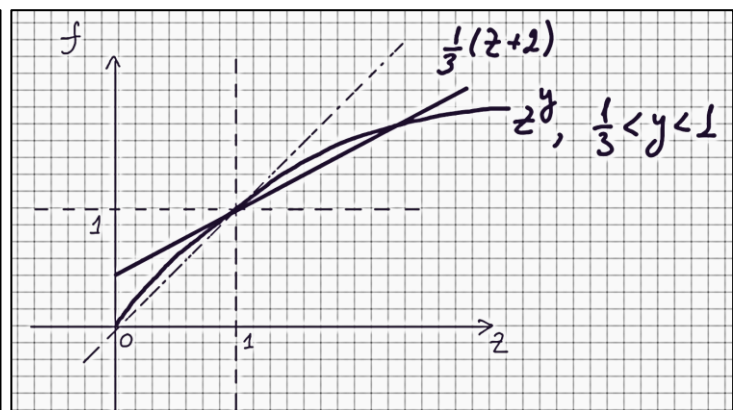


Рис.3

Действительно, в случае $0 < y < \frac{1}{3}$ (рис. 2) касательная, проведенная к z^y в точке $z = 1$, оказывается в некоторой левой окрестности точки касания выше прямой $\frac{1}{3}(z + 2)$, а следовательно, и сам график z^y находится выше прямой $\frac{1}{3}(z + 2)$ в некоторой (возможно меньшей) левой окрестности точки $z = 1$. Однако, в точке $z = 0$ функция z^y обнуляется и её график становится уже ниже прямой $\frac{1}{3}(z + 2)$. В силу непрерывности обеих функций строго внутри интервала $(0, 1)$ найдется точка пересечения их графиков.

В случае $\frac{1}{3} < y < 1$ (рис. 3) будет наблюдаться аналогичная ситуация: в некоторой правой окрестности точки касания $z = 1$ график z^y находится выше прямой $\frac{1}{3}(z + 2)$. Однако, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{z^y}{\frac{1}{3}(z+2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3z^{y-1} = 0$, следовательно, рано или поздно график функции z^y станет ниже прямой $\frac{1}{3}(z + 2)$, и в силу непрерывности обеих функций на луче $(1, +\infty)$ найдется точка пересечения их графиков.

Ответ: $y \in (0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 1)$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит обоснованную схему, но найден интервал $(\frac{1}{3}, 1)$	$\pm$	10
Решение задачи, содержит обоснованную схему, но найден интервал $(0, \frac{1}{3})$	+/-	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении. Ответ отсутствует или неверный.	$\mp$	3
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.		
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	—	0

Задача не решалась.	0	0
---------------------	---	---

Задача 8 (16 баллов)

Телефонная компания планирует перейти с поминутной оплаты (по 1 рублю за каждую полную и неполную минуту разговора) на точную оплату (разговор стоит t рублей, где t — время разговора в минутах). В связи с этим специалисты компании выбрали 100 звонков и подсчитали, что при точной оплате за эти звонки было бы получено на 30% денег меньше, чем при поминутной. Каким наименьшим (среди этих 100) могло быть количество звонков длительностью менее 3 минут каждый?

Решение.

За t минут разговора клиент платит (по-новому) меньше, чем $t + 1$ руб. Поэтому, если состоялись разговоры длительностью $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ минут соответственно, то за них получено меньше, чем $T + 100$ руб., где $T = t_1 + t_2 + \dots + t_{100}$. Из условия задачи имеем $T < 0,7 \cdot (T + 100)$. Откуда, $T < \frac{700}{3}$.

Пусть ровно n из выбранных 100 звонков имели длительность менее 3 минут. Тогда на остальные $100 - n$ звонков пришлось не меньше $3 \cdot (100 - n)$ минут и должно выполняться неравенство $3 \cdot (100 - n) < \frac{700}{3}$. Наименьшим таким целым является $n = 23$. Покажем, что $n = 23$ могло быть реализовано в выбранных 100 разговорах. Пусть $t_1 = t_2 = \dots = t_{23} = a < 1$ и $t_{24} = t_{25} = \dots = t_{100} = 3 + a \geq 3$. Тогда

$$\underbrace{23 \cdot a + (100 - 23) \cdot (3 + a)}_{\text{оплата по-новому}} = 0,7 \cdot \underbrace{(23 \cdot 1 + (100 - 23) \cdot 3 + (100 - 23) \cdot 1)}_{\text{оплата по-старому}}$$

Тогда, $a = \frac{23 \cdot 0,9 - 20}{100} = 0,007$. Действительно, найденное $a < 1$, что доказывает возможность найденного минимального набора таких звонков в количестве $n = 23$.

Ответ: $n = 23$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	16
Доказана нижняя оценка $n \geq 23$, но пример не приведен	+	13
Есть пример на $n = 23$, но минимальность такого набора не доказана	$\pm$	5
Доказана только верхняя оценка на сумму чеков $T < \frac{700}{3}$	+/-	3

Задача не решена, содержательных продвижений нет.	—	0
Задача не решалась.	0	0