ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2020-2021 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

10 класс

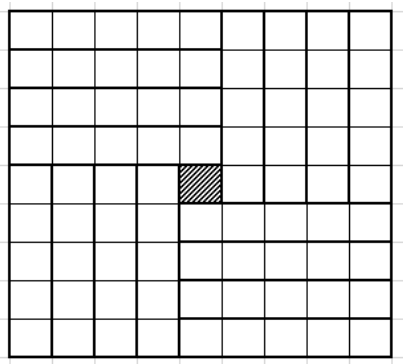
Вариант 1

Задание 1 (10 баллов)

Какую клетку доски размера 9×9 можно вырезать так, чтобы оставшуюся часть доски можно было бы замостить прямоугольными плитками размера 1×5?

Решение.

Достаточно вырезать центральную клетку доски, при этом укладка плиток будет следующая:



P.S. Строго говоря никакую другую одну клетку вырезать нельзя, но это не требуется доказывать.

Ответ: Достаточно вырезать центральную клетку доски.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, укладка плиток не завершена, но ответ получен.	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Укладка плиток не завершена, ответ не получен	+/2	4

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 2 (10 баллов)

На финансовом рынке начали работать тридцать мелких банков. Каждый из них может укрупняться, купив любой другой банк. Банк считается крупным, если он сумел купить не менее трех других (мелких или крупных) банков. Считается, что если крупный банк был куплен другим банком, то он по-прежнему остается крупным. Купленный банк повторно не продается.

Какое наибольшее количество банков смогут стать крупными?

Доказательство.

Пусть $n -$ число крупных банков. Все вместе они купили не меньше $3n$ разных банков (каждый банк может быть купленным один раз). При этом хотя бы один банк должен еще остаться как последний укрупнившийся банк, которого никто не купил. Поэтому имеем оценку: $3n + 1 \leq 30$. Откуда $n \ \leq 9$.
Покажем, что $n = 9$ достижимо: 7 банков могут сначала купить по 3 банка, став крупными. Тогда задействованы $7 + 3 \cdot 7 = 28$ банков. Оставшиеся два банка (из 30) могут купить по три банка из вновь образованных 7 крупных банков и стать, таким образом, еще двумя крупными банками.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении, но в нем присутствуют факты, противоречащие условию (например, повторная продажа банков или не учёт самого банка-покупателя) .	+/2	5

Решение незаконченное. Приведен пример без оценки и верный ответ	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (12 баллов)

В 1995 году создатель Шнобелевской премии Марк Абрахамс начал выпускать журнал «Анналы невероятных исследований». Этот журнал выходит нерегулярно, но не реже, чем 5 раз за 3 года. Докажите, что если журнал будет издаваться в таком режиме достаточно долго, то когда-нибудь его порядковый номер (выпуски нумеруются подряд, начиная с первого номера) совпадет с годом его выпуска.

Доказательство.

Рано или поздно номер журнала превысит номер года. Например, если рассмотреть самый минимальный выпуск журналов (строго по 5 штук каждые 3 года), то через 3000 лет номер журнала станет больше значения года. Действительно, уже к 1995 + 3000 = 4995 году выйдет $3000 \cdot \frac{5}{3} = 5000$ номеров. Ясно, что такое превышение когда-то будет зафиксировано впервые. Обозначим этот год, как N, т.е. N – номер года, в котором впервые был издан журнал с номером превышающем номер года.

Но тогда сам журнал с номером N мог быть издан только в этом же N-ом году и утверждение доказано, т.к. если бы журнал с номером N был выпущен ранее в один из предшествующих годов, то номер предшествующего года оказался бы меньше номера журнала N и тогда первым годом, где наблюдалась бы такая ситуация, не был бы год N, а был бы более ранний. Но мы обозначали за N именно тот год, когда впервые был напечатан журнал с номером, превышающем номер года.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования. Например, рассмотрен не общий случай, а частный – выпуск по 5 журналов каждые 3 года.	±	8

Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получены неверные оценки.		
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении, но не доведено до конца	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 4 (12 баллов)

Двое по очереди бросают симметричную монету (вероятности выпадения орла и решки одинаковы). Тот, у кого первым выпадает орёл, выигрывает партию. Каковы вероятности выигрыша каждого из них?

Решение.

Способ 1.

$$P(A - \text{выигрыш первого}) = P(\Gamma + \bar{\Gamma}\cdot\bar{\Gamma}\cdot\Gamma + \bar{\Gamma}\cdot\bar{\Gamma}\cdot\bar{\Gamma}\cdot\bar{\Gamma}\cdot\Gamma + \cdots) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \cdots = \frac{1}{2}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right)}_{\text{геометрическая прогрессия}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Способ 2.

Пусть x — вероятность выигрыша первого, тогда $y = (1 - x)$ — вероятность выигрыша второго.

$$\text{Тогда } P(A) = x = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{выиграл сразу}} + \underbrace{\frac{1}{2}(1 - x)}_{\text{после первого промаха первый выигрывает с вероятностью второго}}.$$

$x = 1 - \frac{x}{2}$. Откуда $x = \frac{2}{3}$.

__Ответ__: $\frac{2}{3}$ —вероятность выигрыша первого, $\frac{1}{3}$ — второго.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12

Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования. Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.	±	10
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено или при правильном ответе в нем отсутствуют важные обоснования.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5 (12 баллов)

Докажите, что для любых целых чисел a и b существуют целые числа x и y такие, что $x^2 + xy + y^2 = 3a^2 + b^2$.

Доказательство.

Достаточно взять $x = a + b$ и $y = a - b$. Тогда

$$x^2 + xy + y^2 = (a + b)^2 + (a + b)(a - b) + (a - b)^2 = 3a^2 + b^2.$$

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему доказательства, но в результате описки или арифметической ошибки доказательство нельзя назвать корректным.	±	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении, однако, x и y не предъявлены в явном виде.	+/2	5

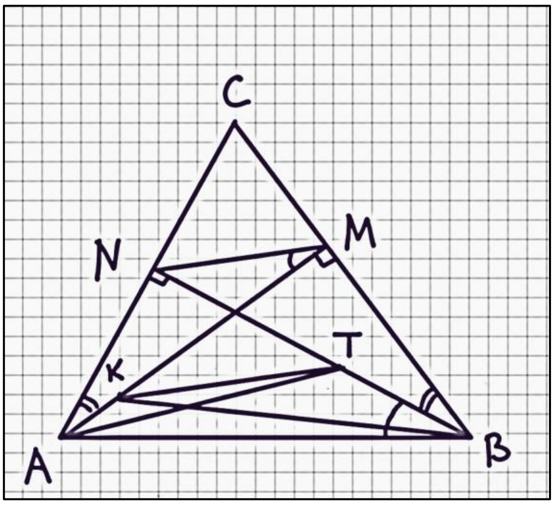
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.		
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6. (14 баллов)

Пусть AM и BN – высоты остроугольного треугольника ABC, в котором $\angle C > 45°$. На отрезках AM и BN отмечены соответственно точки K и T так, что $MK = MB$ и $NT = NA$. Докажите, что прямые MN и KT параллельны.

Доказательство.

При $\angle C > 45°$ чертёж будет выглядеть, как показано на рисунке ниже (P.S. при равенстве $\angle C = 45°$ точки K и T совпали бы с пересечением отрезков AM и NB):



1. Заметим, что точки A, N, M, B лежат на одной окружности, т.к. отрезок AB виден под одним и тем же углом (90°) из точек N и M. Тогда $\angle AMN = \angle ABN$ как опирающиеся на хорду AN и $\angle MAN = \angle MBN$ как опирающиеся на хорду NM (углы отмечены на рисунке).

2. В равнобедренном треугольнике ANT с углом при вершине 90° угол при основании $\angle TAN = 45°$ (аналогично в треугольнике BMK). Тогда имеем: $\angle TAK = \angle TAN - \angle MAN = 45° - \angle MAN = 45° - \angle MBN = \angle MBK - \angle MBN = \angle KBT$.

Но тогда точки A, T, K, B лежат на одной окружности, т.к. отрезок TK виден под одним и тем же углом из точек A и B: $\angle TAK = \angle KBT$. Поэтому $\angle AKT + \angle ABT = 180°$ и $\angle TKM = 180° - \angle AKT = 180° - (180° - \angle ABT) = \angle ABT = \angle AMN$.

Следовательно, внутренние накрест лежащие $\angle TKM$ и $\angle AMN$ равны, что доказывает параллельность MN и KT.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему доказательства, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Однако, итоговое утверждение не доказано.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов)

Решите уравнение

$$x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{1+x^2}.$$

<u>*Решение.*</u>

Образуем два вспомогательных вектора $(x;\ 1)$ и $\left(\sqrt{1+x};\ \sqrt{3-x}\right)$. Их скалярное произведение дает левую часть уравнения, а произведение их длин – правую часть уравнения. Следовательно, данные векторы коллинеарны, т.е. $x\sqrt{3-x}=\sqrt{1+x}$. Возведем в квадрат полученное уравнение и заметим, что $x=1$ его корень: $(x-1)(x^2-2x-1)=0$.

Из трех корней $x_1=1$, $x_2=1+\sqrt{2}$ и $x_3=1-\sqrt{2}$ после проверки остаются два корня $x_1=1$ и $x_2=1+\sqrt{2}$.

<u>*Ответ*</u>: $x_1=1$ и $x_2=1+\sqrt{2}$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**

Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении и найдено уравнение для нетривиального корня $x_2 = 1 + \sqrt{2}$	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении и найден лишь тривиальный корень $x_1 = 1$.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задача 8 (16 баллов)

Дана трапеция $ABCD$, у которой $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$. Докажите, что для любой точки X внутри трапеции справедливо неравенство $XD - XA - XB \leq CD$.

<u>Доказательство.</u>

Пусть точка $O -$ середина основания AD данной трапеции. Достроим её до правильного шестиугольника $ABCDEF$ и выполним поворот вокруг точки D на угол $60°$ против часовой стрелки. Тогда $B \to F$, а $X \to X_1$. Причем, треугольник DXX_1 равносторонний, т.к. равнобедренный $DX = DX_1$ (при повороте длины не меняются) с углом при вершине в $60°$.

Тогда $XB = X_1F$, $CD = AF$. В итоге $XA + XB + CD = XA + AF + FX_1 \geq XX_1 = XD$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	16
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	10
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+/2	7

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2020-2021 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

10 класс

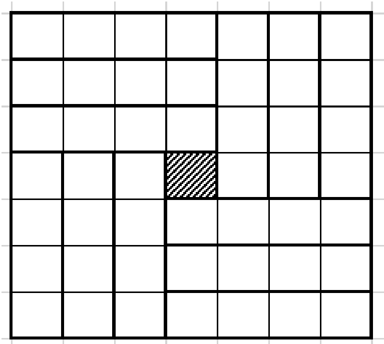
Вариант 2

Задание 1 (10 баллов)

Какую клетку доски размера 7×7 можно вырезать так, чтобы оставшуюся часть доски можно было бы замостить прямоугольными плитками размера 1×4?

Решение.

Достаточно вырезать центральную клетку доски, при этом укладка плиток будет следующая:



P.S. Строго говоря никакую другую одну клетку вырезать нельзя, но это не требуется доказывать.

Ответ: Достаточно вырезать центральную клетку доски.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, укладка плиток не завершена, но ответ получен.	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Укладка плиток не завершена, ответ не получен	+/2	4

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 2 (10 баллов)

На финансовом рынке начали работать сорок мелких банков. Каждый из них может укрупняться, купив любой другой банк. Банк считается крупным, если он сумел купить не менее четырех других (мелких или крупных) банков. Считается, что если крупный банк был куплен другим банком, то он по-прежнему остается крупным. Купленный банк повторно не продается.

Какое наибольшее количество банков смогут стать крупными?

Доказательство.

Пусть $n -$ число крупных банков. Все вместе они купили не меньше $4n$ разных банков (каждый банк может быть купленным один раз). При этом хотя бы один банк должен еще остаться как последний укрупнившийся банк, которого никто не купил. Поэтому имеем оценку: $4n + 1 \leq 40$. Откуда $n \ \leq 9$.
Покажем, что $n = 9$ достижимо: 7 банков могут сначала купить по 4 банка, став крупными. Тогда задействованы $7 + 4 \cdot 7 = 35$ банков. А среди оставшихся 5-ти банков (из 40) два банка могут купить каждый по три разных банка из вновь образованных 7-ми крупных банков и по одному из оставшихся и стать, таким образом, еще двумя крупными банками.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении, но в нем присутствуют факты, противоречащие условию (например, повторная продажа банков или не учёт самого банка-покупателя) .	+/2	5

Решение незаконченное. Приведен пример без оценки и верный ответ	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (12 баллов)

В 1995 году создатель Шнобелевской премии Марк Абрахамс начал выпускать журнал «Анналы невероятных исследований». Этот журнал выходит нерегулярно, но не реже, чем 4 раза за 3 года. Докажите, что если журнал будет издаваться в таком режиме достаточно долго, то когда-нибудь его порядковый номер (выпуски нумеруются подряд, начиная с первого номера) совпадет с годом его выпуска.

Доказательство.

Рано или поздно номер журнала превысит номер года. Например, если рассмотреть самый минимальный выпуск журналов (строго по 4 штуки каждые 3 года), то через 6000 лет номер журнала станет больше значения года. Действительно, уже к 1995 + 6000 = 7995 году выйдет $6000 \cdot \frac{4}{3} = 8000$ номеров. Ясно, что такое превышение когда-то будет зафиксировано впервые. Обозначим этот год, как N, т.е. N – номер года, в котором впервые был издан журнал с номером превышающем номер года.

Но тогда сам журнал с номером этого года N мог быть издан только в этом же N-ом году и утверждение доказано, т.к. если бы журнал с номером N был выпущен ранее в один из предшествующих годов, то номер предшествующего года оказался бы меньше номера журнала N и тогда первым годом, где наблюдалась бы такая ситуация, не был бы год N, а был бы более ранний. Но мы обозначали за N именно тот год, когда впервые был напечатан журнал с номером, превышающем номер года.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования. Например, рассмотрен не общий случай, а частный – выпуск по 4 журнала каждые 3 года.	±	8

Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получены неверные оценки.		
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении, но не доведено до конца	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 4 (12 баллов)

Двое по очереди бросают симметричный кубик (вероятности выпадения всех граней одинаковы). Тот, у кого первым выпадает шестерка, выигрывает партию. Каковы вероятности выигрыша каждого из них?

Решение.

Способ 1.

$P(A - \text{выигрыш первого}) = P(6 + \overline{6} \cdot \overline{6} \cdot 6 + \overline{6} \cdot \overline{6} \cdot \overline{6} \cdot \overline{6} \cdot 6 + \cdots) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6} +$
$+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6} + \cdots = \frac{1}{6}\underbrace{\left(1 + \frac{25}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^2 + \cdots\right)}_{\text{геометрическая прогрессия}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11}.$

Способ 2.

Пусть x – вероятность выигрыша первого, тогда $y = (1 - x)$ – вероятность выигрыша второго.

Тогда $P(A) = x = \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{выиграл сразу}} + \underbrace{\frac{5}{6}(1 - x)}_{\text{после первого промаха первый выигрывает с вероятностью второго}}.$

$x = 1 - \frac{5}{6}x$. Откуда $x = \frac{6}{11}$.

Ответ: $\frac{6}{11}$ –вероятность выигрыша первого, $\frac{5}{11}$ – второго.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12

Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования. Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.	±	10
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено или при правильном ответе в нем отсутствуют важные обоснования.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5 (12 баллов)

Докажите, что для любых целых чисел a и b существуют целые числа x и y такие, что $x^2 - xy + y^2 = a^2 + 3b^2$.

<u>Доказательство.</u>

Достаточно взять $x = a + b$ и $y = a - b$. Тогда

$$x^2 - xy + y^2 = (a + b)^2 - (a + b)(a - b) + (a - b)^2 = a^2 + 3b^2.$$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему доказательства, но в результате описки или арифметической ошибки доказательство нельзя назвать корректным.	±	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении, однако, x и y не предъявлены в явном виде.	+/2	5

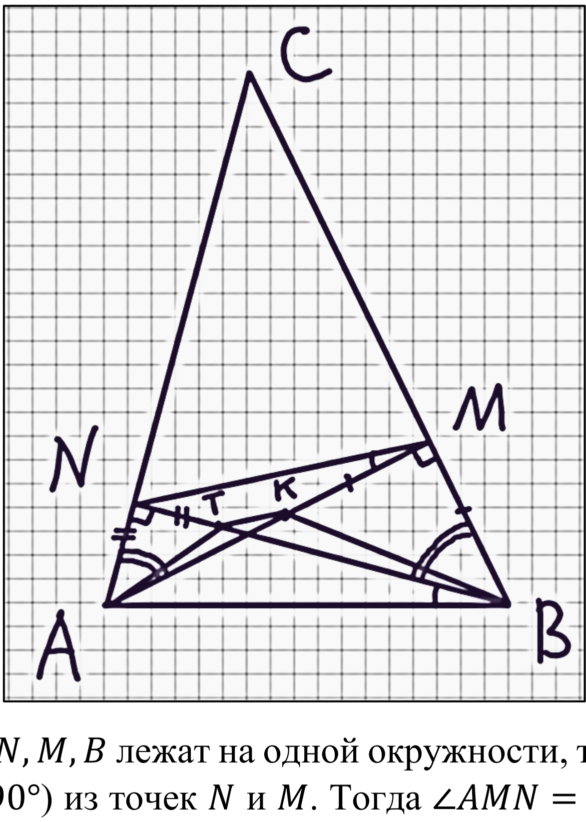
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.		
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6. (14 баллов)

Пусть AM и BN – высоты остроугольного треугольника ABC, в котором $\angle C < 45°$. На отрезках AM и BN отмечены соответственно точки K и T так, что $MK = MB$ и $NT = NA$. Докажите, что прямые MN и KT параллельны.

Доказательство.

При $\angle C < 45°$ чертёж будет выглядеть, как показано на рисунке ниже (P.S. при равенстве $\angle C = 45°$ точки K и T совпали бы с пересечением отрезков AM и NB):



1. Заметим, что точки A, N, M, B лежат на одной окружности, т.к. отрезок AB виден под одним и тем же углом (90°) из точек N и M. Тогда $\angle AMN = \angle ABN$ как опирающиеся на хорду AN и $\angle MAN = \angle MBN$ как опирающиеся на хорду NM (углы отмечены на рисунке).

2. В равнобедренном треугольнике ANT с углом при вершине $90°$ угол при основании $\angle TAN = 45°$ (аналогично в треугольнике BMK). Тогда имеем: $\angle TAK = \angle MAN - \angle TAN = \angle MAN - 45° = \angle MBN - 45° = \angle MBN - \angle MBK = \angle KBT$.

Но тогда точки A, T, K, B лежат на одной окружности, т.к. отрезок TK виден под одним и тем же углом из точек A и B: $\angle TAK = \angle KBT$. Это приводит к равенству углов $\angle ABT = \angle AKT$, опирающихся на общую хорду AT. Но $\angle ABT = \angle AMN$. Следовательно, $\angle AKT = \angle AMN$, что и доказывает параллельность MN и KT.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему доказательства, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Однако, итоговое утверждение не доказано.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов)

Решите уравнение

$$x\sqrt{x} + \sqrt{4-x} = 2\sqrt{1+x^2}.$$

Решение.

Образуем два вспомогательных вектора $(x;\ 1)$ и $\left(\sqrt{x};\ \sqrt{4-x}\right)$. Их скалярное произведение дает левую часть уравнения, а произведение их длин – правую часть уравнения. Следовательно, данные векторы коллинеарны, т.е. $x\sqrt{4-x} = \sqrt{x}$. Возведем в квадрат полученное уравнение и заметим, что $x = 0$ его корень: $x \cdot (x^2 - 4x + 1) = 0$.

Из трех корней $x_1 = 0$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ и $x_3 = 2 - \sqrt{3}$ после проверки остаются все.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ и $x_3 = 2 - \sqrt{3}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении и найдено уравнение для нетривиальных корней $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении и найден лишь тривиальный корень $x_1 = 0$.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задача 8 (16 баллов)

Дана трапеция $ABCD$, у которой $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$. Докажите, что для любой точки X за пределами трапеции справедливо неравенство $XD - XA - XB \leq CD$.

Доказательство.

Пусть точка $O-$ середина основания AD данной трапеции. Достроим её до правильного шестиугольника $ABCDEF$ и выполним поворот вокруг точки D на угол $60°$ против часовой стрелки. Тогда $B \to F$, а $X \to X_1$. Причем, треугольник DXX_1 равносторонний, т.к. равнобедренный $DX = DX_1$ (при повороте длины не меняются) с углом при вершине в $60°$.

Тогда $XB = X_1F$, $CD = AF$. В итоге $XA + XB + CD = XA + AF + FX_1 \geq XX_1 = XD$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	16
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	10

Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0