Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАДАНИЯ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП

Математика 8-9 класс, 2016/2017 учебный год

Задание 1. (10 баллов)

Каждый из 2017 учащихся средней школы изучает английский или немецкий язык. Английский язык изучают от 70% до 85% от общего числа учащихся, а оба языка изучают от 5% до 8%. Какое наибольшее число школьников может изучать немецкий язык.

Решение.

Пусть A человек изучают английский язык, N – немецкий, а AN – оба языка.

Тогда $N = 2017 - A + AN$.

Известно, что $A \geq 2017 \cdot 0{,}7 = 1411{,}9$ и $AN \leq 0{,}08 \cdot 2017 = 161{,}36$.

Следовательно, $N \leq 2017 - 1412 + 161 = 766$.

Заметим, что $N = 766$, если $A = 1412$, $AN = 161$

Ответ: 766.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	10
Допущена незначительная вычислительная ошибка.	+.	8
Приведены основные оценки. Отсутствует необходимая строгость в получении ответа. Ответ верный.	±	7
Приведены основные оценки. Отсутствует необходимая строгость в получении ответа. Ответ неверный.	+/2	5
Приведены не все оценки. Ответ не получен или неверный.	∓	2
Ответ верный, но решение отсутствует.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 2. (10 баллов)

Иван-царевич сражается с Змеем Горынычем на Калиновом мосту. У Змея 198 голов. Одним взмахом меча Иван-царевич может отрубить пять голов, но после этого у Змея моментально отрастают новые головы в количестве, равном остатку при делении на 9 от числа оставшихся после удара Ивана-царевича голов. Если число оставшихся голов делится на 9, то новые головы не вырастают. Если голов перед взмахом у Змея Горыныча было пять или меньшее, то Иван царевич одним взмахом убивает поганого Змея. Сколько взмахов мечом должен сделать Иван-царевич, чтобы победить Змея Горыныча?

Решение.

События развивались так:

Было 198 голов,

1. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 193 головы, выросли новые получилось 197,
2. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 192, выросли новые получилось 195,

3. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 190, выросли новые получилось 191,
4. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 186, выросли новые получилось 192,
5. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 187, выросли новые получилось 194,
6. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 189, новые не выросли.

Таким образом, для уменьшения числа голов на 9 (с 198 до 189) понадобилось 6 взмахов.

Следовательно, для уменьшения числа голов с 198 до 9 понадобится 6·(198-9)/9 = 126 взмахов.

После этого нужно еще 4 взмаха:

1. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 4 головы, выросли новые получилось 8,
2. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 3, выросли новые получилось 6,
3. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 1, выросли новые получилось 2,
4. Иван царевич взмахнул мечом и убил змея.

Ответ: 130 взмахов.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	10
Допущена незначительная вычислительная ошибка.	+.	8
Найдена основная идея решения. Решение неполное. Ответ верный.	±	7
Найдена основная идея решения. Найден период равный 9. Не учтено, что для четырех взмахов достаточно, чтобы отрубить последние 9 голов.	+/2	5
Показана идея периодичности, но период не найден или найден неверно.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 3. (12 баллов)

Найдите все пары (a, b) действительных чисел a и b таких, что уравнения $x^2 + ax + b^2 = 0$ и $x^2 + bx + a^2 = 0$ имеют хотя бы один общих корень.

Решение.

Пусть x_0 – общий корень уравнений.

Подставляя x_0 в уравнения и вычитая одно из другого, получим

$$(a-b)x_0 + b^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)\big(x_0 - (a+b)\big) = 0.$$

1) Пусть $a \neq b$, тогда $x_0 = a + b$ и

$(a+b)^2 + a(a+b) + b^2 = 0$ или $2a^2 + 3ab + 2b^2 = 0$ или $2(a + \frac{3}{4}b)^2 + \frac{7}{8}b^2 = 0$. Откуда следует, что $a = b = 0$, противоречие.

2) Пусть $a = b$, тогда оба уравнения имеют вид $x^2 + ax + a^2 = 0$ с дискриминантом $-3a^2 \leq 0$. Следовательно, единственная возможность это $a = b = 0$.

Ответ. (0,0)

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	12
Найдена основная идея решения. Показано, что других решений нет. Решение неполное или содержит недочеты. Ответ верный.	±	9
Найдена основная идея решения. Ответ верный. Не показано, что других решений нет.	+/2	6
Приведен верный ответ. Решение отсутствует или не содержит продвижения в верном направлении.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 4. (12 баллов)

Найдите наименьшее положительное целое число, в котором произведение цифр равно 5120.

Решение.

Так как 5120=$2^{10} \cdot 5$, то основной вопрос – сколько цифр в этом числе. Очевидно, что среди цифр нет 0 и есть 5. Из десяти множителей 2 мы можем сделать минимально 4 цифры. Это возможно сделать двумя способами: 2,8,8,8 или 4,4,8,8. Тогда из двух наборов цифр 5,2,8,8,8 и 5,4,4,8,8 мы должны составить наименьшее число. Первая цифра должна быть минимальной, т.е. 2.

Ответ: 25888.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	12
Приведена идея разложения числа на простые множители. Представлены не все варианты разложения. Ответ верный.	±	9
Найдена основная идея решения. Представлены все варианты разложения. Получен неверный ответ.	+/2	6

Приведена идея разложения числа на простые множители. Представлены не все варианты разложения. Ответ неверный.	∓	2
Ответ верный, решение отсутствует.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	–/0	0
Максимальный балл		10

Задание 5. (12 баллов)

Ася учится писать и умеет писать три буквы А, С и Я. Мама предложила ей написать семь букв подряд. В полученном «слове» три подряд идущих буквы образовали имя «АСЯ». Сколько существует таких различных семибуквенных «слов»?

<u>Решение.</u>

Можно рассмотреть слово АСЯ как четвертую букву, тогда семибуквенные слова превратятся в пятибуквенные. «Буква» АСЯ может стоять на одном из 5 мест, в остальных местах может стоять любая из 3 букв, следовательно, получаем $5 \cdot 3^4 = 405$ слов. При этом среди них есть слова, где «буква» АСЯ написана дважды. Эти слова посчитаны дважды. Таких слов $3 \cdot 3 = 9$: *x*АСЯАСЯ, АСЯ*x*АСЯ, АСЯАСЯ*x*, где *x* – одна из букв А, С или Я. Таким образом, всего различных слов, содержащих имя АСЯ равно 405 – 9 = 396.

<u>Ответ:</u> 396.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	12
Допущена незначительная вычислительная ошибка.	+.	10
Правильно представлены расчеты без учета повторения имени в «слове». Учтено, что имя может повторяться, но при этом допущены ошибки.	±	9
Правильно представлены расчеты без учета повторения имени в «слове». Не учтено, что имя может повторяться.	+/2	6
Представлены расчеты без учета повторения имени часть из которых верные.	∓	2
Указана идея, что имя может повторяться. Расчеты неверные.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	–/0	0
Максимальный балл		10

Задание 6. (14 баллов)

На хорде AB окружности отмечена точка P так, что $AP = 2PB$. Хорда DE перпендикулярна AB и проходит через точку P. Докажите, что середина отрезка AP является точкой пересечения высот треугольника AED.

Решение.

Пусть M – середина отрезка AP, а прямая EM пересекает отрезок AD в точке Q. Треугольники MPE и BPE – равны по двум катетам. Тогда углы $\angle QAM = \angle DAB = \angle DEB = \angle PEB = \angle PEM$. Т.к. $\angle QMA = \angle EMP$, то треугольники QMA и EMP имеют два равных угла. Значит у них равен и третий угол, и он прямой. EQ и AP – высоты в треугольнике ADE, значит M – точка пересечения высот.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	14
Доказательство приведено. Нет строгого обоснования отдельных фактов.	±	11
Приведены основные оценки. Отсутствует необходимая строгость в получении ответа. Ответ неверный.	+/2	7
Доказательства нет, но имеется определенное продвижение в верном направлении.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	–/0	0
Максимальный балл		14

Задание 7. (14 баллов)

В некоторой компании ни у каких двух сотрудников нет работы одинаковой сложности, и никакие двое не получают одинаковую зарплату. 1 апреля каждый сотрудник сделал два утверждения:

(а) Не найдется 12 сотрудников с более сложной работой.

(б) По меньшей мере 30 сотрудников имеют большую зарплату.

Сколько сотрудников в компании, если часть сотрудников дважды сказали правду, а остальные дважды солгали.

Решение.

Если 1 апреля все сотрудники компании сказали правду, то второе утверждение про наибольшую зарплату ложно, что быть не может. Если же все они солгали, то первое утверждение для сотрудника с наибольшей зарплатой будет верно, то есть вновь получаем противоречие.

Таким образом, существует хотя бы один солгавший и хотя бы один сказавший правду.

Возьмем сотрудника, сказавшего правду с наибольшей зарплатой из всех правдивых сотрудников. Поскольку из его второго утверждения следует, что по меньшей мере 30 «лжецов» имеют большую зарплату, чем он. Второе утверждение солгавшего сотрудника, имеющего наименьшую зарплату среди «лжецов» ложно, таким образом, не более 29 «лжецов» имеют большую зарплату и не более 30 «лжецов» всего. То есть лжецов всего 30.

Первое утверждение для «лжеца» с наиболее трудной работой среди всех «лжецов» ложно, поэтому существуют по меньшей мере 12 правдивых сотрудников, имеющих более трудную работу.

Первое утверждение для правдивого сотрудника с наименее сложной работой среди всех правдивых сотрудников верно, поэтому существует не более 12 правдивых сотрудников всего. То есть правдивых сотрудников ровно 12.

Окончательно получаем, что в компании работают 42 сотрудника.

Ответ. 42

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	14
Ответ верный. Нет строгого обоснования, что лжецов 30 или что правдивых сотрудников 12.	±	11
Ответ верный. Утверждается, что лжецов 30, а правдивых сотрудников 12, но не доказываны оба эти факта.	+/2	7
Приведен верный ответ. В решении не указано, что лжецов 30, а правдивых сотрудников 12.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		14

Задание 8. (16 баллов)

В классе 14 девочек. Каждая из них узнала, скольких девочек в классе зовут также как ее, и у скольких такая же фамилия, и выписала два числа на доску. Оказалось, что среди чисел на доске встречаются все числа от 0 до 6. Докажите, что найдутся две девочки в классе, у которых совпадают и имя, и фамилия.

Решение.

Рассмотрим множества девочек с одинаковым именем. Это подмножества множества из 14 девочек. Также рассмотрим множества девочек с одинаковой фамилией, это тоже подмножества исходного множества. Каждая девочка принадлежит двум таким множествам, и по условию задачи эти множества содержат 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 человек, но сумма этих чисел 1+2+3+4+5+6+7=28. Таким образом, есть по одному множеству каждого размера и нет никаких других множеств.

Предположим без ограничения общности, что множество из 7 элементов – это множество девочек с одинаковым именем. Существуют по меньшей мере 6 множеств девочек с одинаковой фамилией и по принципу Дирихле, две девочки из множества из 7 имеют одинаковое имя и фамилию.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	16
Доказательство приведено. Нет строгого обоснования отдельных фактов.	±	12
Доказательства нет. Определено количество множества девочек с одинаковой фамилией и множества девочек с одинаковым именем.	+/2	8
Доказательства нет. Для множеств девочек с одинаковой фамилией и/или одинаковым именем определено количество элементов.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		16