Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАДАНИЯ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП

Математика 10 класс, 2016/2017 учебный год

Задание 1. (10 баллов)

Сколько существует натуральных чисел n не превосходящих 2017, таких что квадратный трехчлен x^2+x-n раскладывается на линейные множители с целочисленными коэффициентами?

Решение.

По условию задачи $x^2+x-n=(x-a)(x-b)$. Следовательно, $ab=-n$, то числа a и b разных знаков и не равны нулю. Без ограничения общности будем считать, что $a\geq 0$.
Поскольку $a+b=-1\Rightarrow b=-1-a$, то

$$ab=-n=a(-1-a)\Rightarrow a^2+a=n\leq 2017\Rightarrow a\leq 44.$$

Таким образом, получаем 44 пары чисел a и b, удовлетворяющих заданным условиям.

Ответ. 44.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	10
Все логические шаги решения приведены, в том числе оценка для одного из корней и связь между корнями квадратного трехчлена. Ответ неверный.	±	7
Верно дана оценка для одного из корней квадратного трехчлена. Ответ неверный или отсутствует.	+/2	5
Показана связь между n и корнями квадратного трехчлена. Приведены неверные оценки для одного из корней и/или количества чисел n, удовлетворяющих условию задачи.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 2. (10 баллов)

В тридесятом государстве 29 февраля одного стародавнего года на ярмарке купец продавал сапоги-самоплясы за 2000 алтын. По правилам торговли, цена на товар корректируется каждое утро перед открытием. Цену можно увеличить на 10%, можно уменьшить на 1% или на 12% относительно цены предыдущего дня, а можно вообще не менять. При этом цена должна быть целым числом алтын, округлять ее нельзя. 1 апреля того же года боярин из торговой инспекции обнаружил, что у того же купца те же сапоги-самоплясы стоят 2017 алтын, и составил акт о нарушении правил торговли. Купец в ответ на это заявил, что никаких нарушений он не допускал. Кто из них прав?

Решение.

Прав боярин.

Если цена была равна s, то после изменения она должна составить $\frac{110}{100}s$, $\frac{99}{100}s$ или $\frac{88}{100}s$. При любом таком изменении новая цена должна делиться на 11. Число 9876543210 на 11 не делится, а потому оно не может быть получена с помощью нескольких таких изменений.

Ответ. Прав боярин.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	10
При решении задачи использовался метод перебора возможных изменений цены. Все варианты были представлены, но не обосновано, что других вариантов нет. Ответ верный.	±	7

При решении задачи использовался метод перебора возможных изменений цены. При этом один или два варианта не были представлены. Ответ верный.	+/2	5
При решении задачи использовался метод перебора возможных изменений цены. При этом более двух вариантов не было представлено. Ответ верный.	∓	2
Представлены формулы для всех возможных изменений цены. Ответ верный.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 3. (12 баллов)

Числовая последовательность такова, что $x_n = \frac{x_{n-1}}{5} + 4$ для всех $n \geq 2$. Найдите x_{2017}, если $x_1 = 6$.

<u>*Решение.*</u>

$$x_2 = \frac{x_1}{5} + 4 = \frac{6}{5} + 4 = 5 + \frac{1}{5}.$$

$$x_3 = \frac{x_3}{5} + 4 = \frac{5 + \frac{1}{5}}{5} + 4 = 5 + \frac{1}{5^2}.$$

Докажем по индукции, что $x_n = 5 + \frac{1}{5^{1-n}}$ при всех натуральных n.

1) $n = 1$: $x_1 = 5 + \frac{1}{5^{1-1}} = 6$ - верно.

2) Пусть утверждение верно при $n = k$: $x_k = 5 + \frac{1}{5^{1-k}}$.

3) $n = k + 1$: $x_{k+1} = \frac{x_k}{5} + 4 = \frac{5 + \frac{1}{5^{1-k}}}{5} + 4 = 5 + \frac{1}{5^{1-(k+1)}}$.

Так как $x_n = 5 + \frac{1}{5^{1-n}}$, то $x_{2017} = 5 + \frac{1}{5^{-2016}}$

<u>*Ответ:*</u> $5 + \frac{1}{5^{-2016}}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы

Полное решение.	+	12
Выписаны несколько первых членов последовательности. Дополнительных обоснований не приведено или приведенные обоснования неверные. Ответ верный.	+/2	6
Выписаны несколько первых членов последовательности в виде суммы 5 и дроби. Ответ отсутствует или неверный.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 4. (12 баллов)

Какое из чисел больше $\frac{1}{2016}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right)$ или $\frac{1}{2017}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2017}\right)$?

Решение.

Обозначим

$$x=\frac{1}{2016}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right),\ y=\frac{1}{2017}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2017}\right), a=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right).$$

Тогда $x=\frac{a}{2016}, y=\frac{1}{2017}\left(a+\frac{1}{2017}\right),\ x-y=\frac{a}{2016}-\frac{a}{2017}-\frac{1}{2017^2}=\frac{1}{2017}\left(\frac{a}{2016}-\frac{1}{2017}\right)>0,$

т.к. $a > 1$.

Ответ: первое число больше.

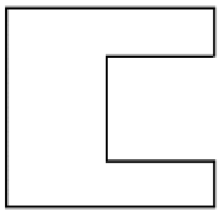
Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Представлены все логические шаги решения. В результате вычислительной ошибки получен неверный ответ.	±	9
Показана связь между двумя сравниваемыми числами. При сравнении чисел допущены ошибки в алгебраических преобразованиях. Ответ приведен, возможно, неверный.	+/2	6
Показана связь между двумя сравниваемыми числами. Отсутствует полное обоснование верного ответа.		
При решении задачи использовался метод перебора возможных изменений цены. При этом более двух вариантов не было представлено. Ответ верный.	∓	2
Показана связь между двумя сравниваемыми числами. Ответа нет.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 5. (12 баллов)

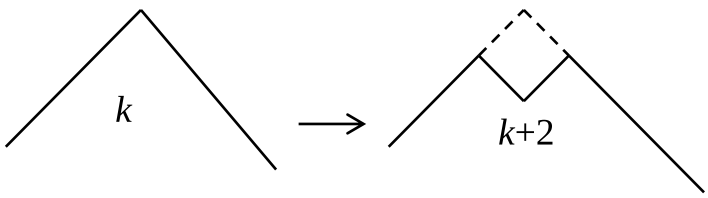
Для каких положительных целых $n > 2$ существует многоугольник с n вершинами (не обязательно выпуклый) такой, что каждая его сторона параллельна какой-либо другой его стороне?

Решение.

1. Если n – четное, то такой многоугольник существует. Достаточно взять правильный n-угольник.
2. Для $n = 3$ и 5 такого быть не может.
   Действительно, никакие две стороны в треугольнике не параллельны. Если каждая из сторон пятиугольника была бы параллельна другой стороне, мы бы нашли три параллельные стороны, при этом две из них должны были бы пересекаться. Это невозможно.
3. Для $n = 7$ такой многоугольник существует. Пример приведен на рисунке.



Докажем по индукции, что для нечетного положительного числа n>5 искомый многоугольник существует. Пусть для некоторого целого k существует k-угольник, удовлетворяющий условию задачи. Выберем вершину, в которой внутренний угол многоугольника меньше 180^0. Теперь отрежем маленький параллелограмм как показано на рис. 2. Мы получим (k+2)-угольник, удовлетворяющий условию задачи.



Ответ: при n ≠ 3 и n ≠ 5.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Доказано, что при четном n такой многоугольник существует. Доказано, что n ≠ 3 и n ≠ 5. Приведен пример семиугольника, который удовлетворяет условию задачи. Доказательство, что	+.	10

подобный многоугольник существует при нечетных n больше 7 неполное.		
Доказано, что при четном n такой многоугольник существует. Доказано, что $n \neq 3$ и $n \neq 5$. Приведен пример многоугольника с нечетным числом сторон, который удовлетворяет условию задачи.	±	9
Доказано, что при четном n такой многоугольник существует.	+/2	6
Верно рассмотрены случаи при некоторых n.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 6. (14 баллов)

Натуральные числа a, b, c, d, и e являются последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите наименьшее возможное значение числа c, если сумма $b + c + d$ является полным квадратом, а сумма $a + b + c + d + e$ является полным кубом.

Решение.

Поскольку $b + d = 2c$, то $3c = n^2$ для некоторого натурального n.

Следовательно, n делиться на 3 и $c = 3l^2$ для некоторого натурального l.

Поскольку $a + b + d + e = 4c$, то $5c = m^3$ для некоторого натурального m.

Следовательно, m делиться на 5 и $c = 5^2 l^3$ для некоторого натурального l.

Наименьшее число, удовлетворяющее данным условиям равно $5^2 3^3 = 675$

Ответ. 675.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	14
Представлены основные логические шаги решения. В решении отсутствуют некоторые обоснования. Ответ верный.	±	11
Представлены основные логические шаги решения. Ответ неверный.	+/2	7
Решение содержит определенное продвижение в верном направлении. Ответ верный.		
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении. Ответ неверный или отсутствует.	∓	3
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0

Максимальный балл	14

Задание 7. (14 баллов)

В конференции принял участие 281 сотрудник из 7 различных филиалов фирмы. В каждой группе из шести участников конференции по меньшей мере двое были одного возраста. Докажите, что среди всех участников можно найти пятерых одного возраста, одного пола и из одного филиала фирмы.

Решение

По принципу Дирихле как минимум в одном филиале как минимум 41 участник и как минимум 21 из них одного пола. Требуется доказать, что по меньшей мере 5 из этих 21 участника одного возраста. Если это не так, то существует не более 4 участников из каждой возрастной группы. В группе из 21 человека как минимум 6 возрастных групп, и если мы возьмем по представителю из каждой возрастной группы, то очевидно получим противоречие с одним из условий задачи.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	14
Доказательство приведено. Нет строгого обоснования отдельных фактов.	±	11
Доказательства нет. Имеется определенное продвижение в верном напралении.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		14

Задание 8. (16 баллов)

Десять пиратов делят между собой золотые и серебряные монеты. Серебряных монет в два раза больше, чем золотых. Они разделили золотые монеты так, что разница между количеством золотых монет у любых двух пиратов не делится на 10. Докажите, что они не смогут разделить серебряные монеты подобным образом.

Решение.

Пусть a_1 – количество золотых монет у первого пирата, a_2 – у второго, и т.д. Так как a_i - a_j не делится на 10 для любых i и j, то числа $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ должны давать различные остатки при делении на 10. Запишем $a_i=10k_i+l_i$., где l_i – остаток a_i при делении на 10. Общее количество золотых монет равно

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 10(k_1+k_2 + \cdots + k_{10}) + (l_1 + \cdots + l_{10}).$$

Так как числа $l_1, \dots, l_{10}$ - в точности числа 0, 1, 2, …, 9 (только не обязательно в таком порядке), то их сумма равна 45. Значит всего золотых монет $10(k_1 + k_2 + \dots + k_{10}) + 45$.

Предположим, что пираты могут разделить серебряные монеты таким же образом. Как и раньше мы можем показать, что общее количество серебряных монет $10(m_1 + m_2 + \dots + m_{10}) + 45$ для некоторых целых чисел $m_1, m_2, \dots, m_{10}$.

Но общее число серебряных монет четно, получаем противоречие.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	16
Доказательство приведено. Нет строгого обоснования отдельных фактов.	±	12
Доказательства нет. Доказано, что число золотых монет нечетно, а число серебряных монет четно.	+/2	8
Доказательства нет. Отмечено, но не доказано, что число золотых монет нечетно, а число серебряных монет четно.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		16