2. Задания олимпиады «Росатом» 2016-2017 учебного года

2.1. Задания олимпиады им.проф. И.В.Савельева (Отборочный этап олимпиады «Росатом»), 11 класс

Задания

1. Решить уравнение $f\left(f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)=x^2-x$, где $f(x)=(3x+5)/(2x-3)$.

2. На промежутке $\left[\pi/6;\pi/2\right)$ найти x, для которых сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\sin x$ и знаменателем $\cos x$ является целым числом.

3. Шестизначное целое положительное число a удовлетворяет четырем условиям: 1) число, составленное из первых трех его цифр, записанных в том же порядке, при делении на 5 дает в остатке 2; 2) число, составленное из последних двух цифр, записанных в том же порядке, при делении на 4 дает в остатке 3; 3) четвертая цифра числа a равна 3; 4) число a делится на 7 без остатка. Найти наибольшее возможное a.

4. На плоскости расположены 9 прямых, разделенных на три группы. Группу A составляют 3 прямых, имеющих одну общую точку. В группу B входят 3 прямые параллельных между собой. Группа C содержит оставшиеся 3 прямые, находящихся в общем положении: каждая пара прямых пересекается, три прямые не имеют общих точек. Группы A,B,C не имеют пересечений. Случайным образом выбираются три прямые. Найти вероятность того, что они могут ограничить на плоскости треугольник.

5. Функция $f(x)$ определена на полуоси $\left[1;+\infty\right)$ так, что для $x\in\left[n;n+1\right)$, $n=1,2,...$ $f(x)=a_n+(a_{n+1}-a_n)(x-n)$, $n=1,2,\ldots$, где $a_n=\text{НОД}(6;n)$. Для любого a решить уравнение $f(x)=a$.

6. Фигура G на плоскости получена из квадрата со стороной $a=10$, из которого вырезан прямоугольник с вершиной A, лежащей внутри квадрата, со сторонами $b=6$ и $c=5$ (см. рис). Найти наибольшую длину отрезка, содержащего точку A, который можно разместить в G.