Ответы и решения

1. Докажем, что $f(f(x)) \equiv x$ для $x \neq \frac{3}{2}$. Действительно,

$$f\left(f(x)\right)=\frac{3f\left(x\right)+5}{2f\left(x\right)-3}=\frac{3\frac{3x+5}{2x-3}+5}{2\frac{3x+5}{2x-3}-3}=\frac{\left(9x+15\right)+\left(9x+15\right)}{\left(6x+10\right)-\left(6x-9\right)}=x.$$

Отсюда следует, что любое четное число композиций функции f равно x. В нашем случае в левой части уравнения f присутствует четыре раза, поэтому $f\left(f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)\equiv x$ для $x \neq 3/2$. В результате исходное уравнение можно переписать в виде: $x=x^2-2$ или $x^2-x-2=0$. Оно имеет корни $x_1=-1,\ x_2=2$.

2. Запишем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\sin x$ и знаменателем $\cos x$: $\frac{\sin x}{1-\cos x}$. Надо найти $x\in\left[\pi/6;\pi/2\right)$, для которого $\frac{\sin x}{1-\cos x}=n,\ n\in Z$. Преобразуем левую часть уравнения: $\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=ctg\frac{x}{2}$, тогда уравнение принимает вид $ctg\frac{x}{2}=n.$ На промежутке $\left[\pi/6;\pi/2\right)$ $ctg\frac{x}{2}\in\left(ctg\frac{\pi}{4};ctg\frac{\pi}{12}\right]$. Так как $ctg\frac{\pi}{4}=1,$ а $ctg\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{1-\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}\approx 3{,}73,$ то $2\le n\le 3.$ При $n=2$ получаем уравнение $ctg\frac{x}{2}=2,$ отсюда $x=2arcctg2,$ а при $n=3$ получаем уравнение $ctg\frac{x}{2}=3,$ отсюда $x=2arcctg3.$

3. Запишем шестизначное число в виде $a=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Наибольшее $\overline{a_1a_2a_3}$, которое при делении на 5 дает остаток 2 это $\overline{a_1a_2a_3}=997.$ По условию задачи $a_4=3.$ Рассмотрим $\overline{a_5a_6}$. Так как по условию $\overline{a_5a_6}$ при делении на 4 дает в остатке 3, то это числа 99, 95, 92 и т.д. (мы расположили их в порядке убывания). Проверка делимости числа $a=\overline{9973a_5a_6}$ на 7 дает $\overline{a_5a_6}=95.$ Следовательно, $997395=7\cdot 142485$ − наибольшее возможное a.

4. По условию задачи на плоскости расположены 9 прямых, разделенных на три группы. Группу A составляют 3 прямые, имеющих одну общую точку. В группу B входят 3 прямые параллельных между собой. Группа C содержит оставшиеся 3 прямые, находящихся в общем положении: каждая пара прямых пересекается, каждые три прямые не имеют общих точек. Группы A,B,C не имеют пересечений. Случайным образом выбираем три прямые и ищем вероятность того, что они могут ограничить на плоскости треугольник.

Случай 1. В выбранной тройке нет прямых из A. Тогда число благоприятных троек равно

$$C_3^0 \cdot C_3^3 + C_3^1 \cdot C_3^2 = 1 + 9 = 10.$$

Случай 2. В выбранной тройке одна прямая из A. Тогда число благоприятных троек равно

$$C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 + C_3^1 \cdot C_3^0 \cdot C_3^2 = 27 + 9 = 36.$$

Случай 3. В выбранной тройке две прямых из A. Тогда число благоприятных троек равно

$$C_3^2 \cdot C_3^1 + C_3^2 \cdot C_3^0 \cdot C_3^1 = 9 + 9 = 18.$$

Складывая эти числа, получим общее число благоприятных троек

$$l = 10 + 36 + 18 = 64.$$

Общее число троек равно $s = C_9^3 = \dfrac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$, тогда вероятность $P(A) = \dfrac{64}{84} = \dfrac{16}{21}$..

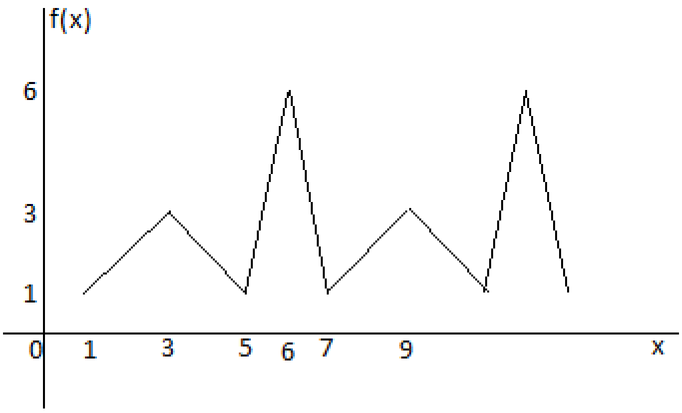
5. Последовательность a_n обладает свойством: $a_{n+6} = a_n$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Значения a_n для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ размещены в таблице:

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	2	3	2	1	6

Для $x \in [n; n+1)$ имеем $x + 6 \in [n+6; n+7)$. Тогда для любого n

$$f(x+6) = (a_{n+7} - a_{n+6})(x + 6 - (n+6)) = (a_{n+1} - a_n)(x - n) = f(x)$$

На рис изображен график функции $f(x)$



Как видно из графика для $a \in (-\infty; 1) \cup (6; +\infty)$ уравнение не имеет решений, поскольку $a \notin E_f = [1; 6]$;

для $a \in (1; 3)$ уравнение имеет четыре серии решений $x_1 = a + 6k$, $x_2 = 6 - a + 6k$, $x_3 = \dfrac{a + 24}{5} + 6k$, $x_4 = \dfrac{36 - a}{5} + 6k$; для $a = 1$ уравнение имеет три серии решений $x_1 = 1 + 6k, x_2 = 5 + 6k, x_3 = 7 + 6k$; для $a = 3$ уравнение имеет три серии решений

$x_1 = 3+6k,\ x_2 = \frac{27}{5}+6k,\ x_3 = \frac{33}{5}+6k$; для $a \in (3;6)$ уравнение имеет две серии решений $x_1 = \frac{a+24}{5}+6k,\ x_2 = \frac{36-a}{5}+6k$; для $a=6$ уравнение имеет одну серию решений $x_1 = 6+6k$, $k \ge 0,\ k \in Z$.

6. Фигура G на плоскости, полученная из квадрата со стороной $a=10$, из которого вырезан прямоугольник с вершиной A, лежащей внутри квадрата, со сторонами $b=6$ и $c=5$, изображена на рис.1. Рассмотрим все возможные расположения отрезка с концами на сторонах фигуры G, содержащего точку A,

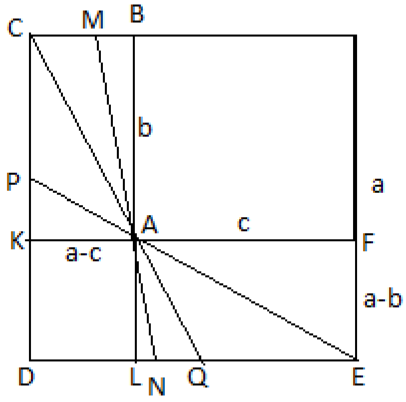


Рис 1

Случай 1. Концы отрезка $M \in BC$, а $N \in DE$, $\angle MAB = \alpha \in \left[0; arctg\frac{5}{6}\right]$. Длина d отрезка MN, равная $d = \frac{a}{\cos\alpha}$, возрастает на указанном отрезке, поскольку знаменатель уменьшается с ростом α.

Поэтому максимальное значение равно $d\left(arctg\frac{5}{6}\right) = CQ = \frac{CD}{\cos\angle DCQ} = \frac{5\sqrt{61}}{3}$.

Случай 2. Концы отрезка $M \in CP$, $N \in DE$, $\angle MAB = \alpha \in \left[arctg\frac{5}{6}; arctg\frac{5}{4}\right]$. Длина d отрезка MN равна $d = \frac{5}{\sin\alpha} + \frac{4}{\cos\alpha}$. Исследуем эту функцию на экстремум на указанном отрезке.

$d' = -5\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + 4\frac{\sin\alpha}{\cos^2 a} = 0$. Критическая точка $\alpha^* = arctg\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ принадлежит отрезку $\left[arctg\frac{5}{6}; arctg\frac{5}{4}\right]$. Так как производная $d'\left(arctg\frac{5}{6}\right) = -\frac{49\sqrt{61}}{45} < 0,$ а производная $d'\left(arctg\frac{5}{4}\right) = \frac{9\sqrt{41}}{20} > 0,$ то α^* - точка локального минимума, а точки $arctg\frac{5}{6}$ и $arctg\frac{5}{4}$ - точки локального максимума. Значение функции d в точке $arctg\,\frac{5}{6}$ мы уже вычисляли. Оно равно $\frac{5\sqrt{61}}{3}$.

Вычислим $d\left(arctg\,\frac{5}{4}\right) = PE = \frac{DE}{\sin\angle DPE} = 2\sqrt{41}.$

Случай 3. Концы отрезка $M \in PK$, $N \in EF$, ,$\angle MAB = \alpha \in \left[arctg\,\frac{5}{4};\frac{\pi}{2}\right]$. Длина d отрезка MN, равная $d = \frac{10}{\sin\alpha}$, убывает на указанном отрезке.

Таким образом, длина отрезка имеет два локальных максимума $\frac{5\sqrt{61}}{3}$ и $2\sqrt{41}.$ Выбираем наибольшее из этих чисел. Это $\frac{5\sqrt{61}}{3}$.