2.17. Олимпиада имени И.В.Савельева (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 9 класс

1. (2 балла) При каких x выражение $x^2(3x-2)^2-2x(3x-2)-3$ принимает минимальное значение?

2. (2 балла) Арифметическая прогрессия a_n имеет разность $d_a=-3$, арифметическая прогрессия b_n имеет разность $d_b=4$ и $b_1=3$. Доказать, что последовательность $c_n=a_{b_n}$ также арифметическая прогрессия. Найти ее
разность и наибольшее значение суммы n ее членов, если $a_1=36$.

3. (2 балла) Четырехзначное число делится на 9, а сумма его цифр тысяч и сотен равна сумме цифр десятков и единиц. Сколько существует чисел, удовлетворяющих этим условиям? Найти минимальное такое число.

4. (2 балла) При каких значениях a справедливо неравенство $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}>\frac{14}{9}$, где x_1 и x_2 - действительные корни уравнения $4x^2+4(a+2)x+7a+4=0$?

5. (2 балла) Точка M расположена на стороне AD прямоугольника $ABCD$ так, что в четырехугольник $BCDM$ можно вписать окружность. Найти отношение площади четырехугольника $BCDM$ к площади прямоугольника, если отношение длин сторон прямоугольника равно 2.

Ответы и решения

1. Ответ: $x=1,\ x=-\frac{1}{3}$

Решение.
Замена: $t=3x^2-2x$. Тогда квадратный трехчлен t^2-2t-3 принимает минимальное значение при $t=1$, т.е. $3x^2-2x=1\to\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1/3 \end{array}\right.$.

2. Ответ: 1) $d_c=-12$ 2) $\min S_n^c=54$, достигается при $n=3$

Решение.

$c_n = a_{b_n} = a_1 - 3(b_n - 1) = a_1 + 3 - 3(3 + 4(n-1)) = a_1 - 6 - 12(n-1)$

Таким образом, $c_n -$ арифметическая прогрессия с первым членом $c_1 = a_1 - 6$ и разностью $d_c = -12$. Сумма n ее членов $S_n^c = \frac{c_1 + c_n}{2} \cdot n = (a_1 - 6)n - 6(n-1)n = n(a_1 - 6n)$.

Наибольшее значение этого квадратного трехчлена достигается при $n = 3$ и равно 54.

3. Ответ: 1) 91 число 2) 1809

Решение.

Пусть x, y, z и u - цифры такого числа, $x \geq 1$. Тогда по условию $x + y + z + u = 9k, k = 1,2,3,4$ и $x + y = z + u$, поэтому $2(x + y) = 9k$, т.е. $x + y$ делится на 9, а $k -$ четное.

Случай 1 $k = 2$

Тогда $x + y = 9$ и $z + u = 9$. Вариантов выбора (x, y), удовлетворяющих первому условию и $x \geq 1$всего 8 , вариантов выбора (z, u), удовлетворяющих второму условию – 10. Таким образом, в случае 1 имеется 80 чисел удовлетворяющих условию задачи . Наименьшее среди них 1809.

Случай 2. $k = 4$

Тогда $x + y = 18 \to x = 9, y = 9$ и $z + u = 18 \to z = 9, u = 9$. В этом случае только одно число 9999.

4. Ответ : $a \in \left(-\frac{4}{7}; 0 \right] \cup [3; +\infty)$

Решение.

Условие существования корней: $D/4 = 4(a+2)^2 - 4(7a+4) = 4a(a-3) \geq 0 \to a \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

Теорема Виета:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{4(a+2)^2}{7a+4} - 2 > \frac{14}{9} \to \frac{9a^2 - 20a + 4}{7a+4} > 0 \to \frac{(a-2)(9a-2)}{7a+4} > 0 .$$

Метод интервалов: $\begin{cases} a \in (-4/7; 2/9) \cup (2; +\infty) \\ a \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty) \end{cases} \to a \in (-4/7; 0] \cup [3; +\infty)$

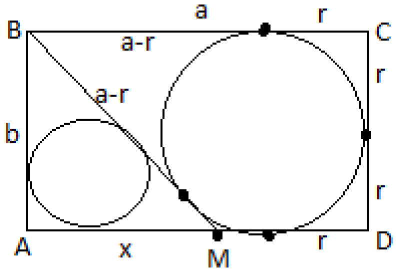
5. Ответ: 1) $S_{BCDM} : S_{ABCD} = \frac{\lambda}{(2\lambda - 1)} = 2:3$

Точка M расположена на стороне AD прямоугольника $ABCD$ так, что в четырехугольник $BCDM$ можно вписать окружность. Найти отношение площади четырехугольника $BCDM$ к площади прямоугольника, если отношение длин сторон прямоугольника равно λ .

Ответ: 1) $S_{BCDM} : S_{ABCD} = \frac{\lambda}{2\lambda - 1)}$

Решение.

Пусть длина стороны AD (большая сторона)прямоугольника равна a, длина стороны AB - b .



$a = \lambda b$ ($\lambda > 1$).

Если $AM = x$, то $BM + b = a + (a - x) \to BM = 2a - b - x$.

Из $\triangle ABM$:

$$b^2+x^2=\left(\left(2a-b\right)-x\right)^2=\left(2a-b\right)^2-2(2a-b)x+x^2\to 2(2a-b)x=\left(2a-b\right)^2-b^2$$

$$x=\frac{2(a-b)\cdot a}{2a-b}=\frac{2(\lambda-1)}{2\lambda-1}a,\ MD=a-x=\frac{1}{2\lambda-1}a$$

Площадь $BCDM$: $S_{BCDM}=\frac{2\lambda}{2\lambda-1}\cdot\frac{ab}{2}=\frac{\lambda}{(2\lambda-1)}S_{ABCD}$. Тогда $S_{BCDM}:S_{ABCD}=\frac{\lambda}{2\lambda-1)}$.

Радиус окружности, вписанной в $\triangle ABM$ равен $R=x+b-a=\frac{\lambda-1}{2\lambda-1}b=\frac{\lambda-1}{\lambda(2\lambda-1)}a$