

2.18. Олимпиада имени И.В.Савельева (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 8 класс

1. (2 балла) Вычислить значение выражения $\frac{xy + \text{НОК}(x, y)}{\text{НОД}(x, y) + 1}$ для $x = 90$, $y = 28$.
2. (2 балла) Петя и Вова братья. Если из возраста их мамы вычесть 16, а из возраста папы 23, то разность квадратов полученных величин будет равна 41. Сколько лет папе и маме, если папа старше мамы не более, чем на 7 лет?
3. (2 балла) Натуральное число a делится на 3 и 11, а при делении на 5 дает в остатке 2. Найти наибольшее трехзначное число, удовлетворяющее этим условиям.
4. (2 балла) Длина пути, соединяющего дома Пети и Вовы, равна s . Вова вышел из своего дома в направлении дома Пети со скоростью 4 км/час. После 2 часов пути Вова решил вернуться домой, но, пройдя в обратном направлении 1 час с той же скоростью, сделал привал на 1 час, а затем продолжил путь домой с прежней скоростью. Одновременно с Вовой, в направлении его дома, вышел Петя и прошел весь путь, не останавливаясь со скоростью 2 км/час. Известно, что он встретил на своем пути Вову 4 раза. Найти при каких значениях s это возможно?
5. (2 балла) Населенные пункты A и B находятся по разные стороны реки шириной 50 м, на расстоянии 300 м и 100 м от ее берегов. Расстояние между A и B по реке равно 300 м. В каком месте реки нужно построить мост, перпендикулярный береговой линии, чтобы путь, соединяющий A и B , имел наименьшую длину. Найти длину этого пути, если берега реки – параллельные прямые, A и B – точки на плоскости, расстояние между A и B по реке – длина отрезка между основаниями перпендикуляров, опущенных из точек A и B на береговую линию.

Ответы и решения

1. Ответ: 1260

Решение.

Преобразование:

$$\frac{xy + \text{НОК}(x, y)}{\text{НОД}(x, y) + 1} = \frac{\text{НОК}(x, y) \cdot \text{НОД}(x, y) + \text{НОК}(x, y)}{\text{НОД}(x, y) + 1} = \frac{\text{НОК}(x, y)(\text{НОД}(x, y) + 1)}{\text{НОД}(x, y) + 1} = \text{НОК}(x, y)$$

Разложение на простые множители: $x = 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $y = 28 = 2^2 \cdot 7$.

Вычисление $\text{НОК}(x, y) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$.

2. Ответ: возраст мамы 37 лет, возраст папы 43 года.

Решение.

m – возраст мамы, n – возраст папы, $m < n$. Тогда по условию: $(m - 16)^2 - (n - 23)^2 = \pm 41$.

Случай 1.

$$(m - 16)^2 - (n - 23)^2 = 41 \rightarrow (m - n + 7)(m + n - 39) = 41.$$

Число 41 простое, поэтому возможны варианты:

$$1.а) \begin{cases} m-n+7=41 \\ m+n-39=1 \end{cases} \quad 1.б) \begin{cases} m-n+7=1 \\ m+n-39=41 \end{cases} \quad 1.в) \begin{cases} m-n+7=-41 \\ m+n-39=-1 \end{cases} \quad 1.г) \begin{cases} m-n+7=-1 \\ m+n-39=-41 \end{cases}.$$

Вариант 1.а дает $m=37, n=3$, что не удовлетворяет условию задачи.

Вариант 1.б дает $m=37, n=43$, что удовлетворяет условию задачи.

Вариант 1.в дает $m=-5, n=43$, что не удовлетворяет условию задачи.

Вариант 1.г дает $m=-5, n=3$, что не удовлетворяет условию задачи.

Случай 2.

$(m-16)^2 - (n-23)^2 = -41 \rightarrow (n-m-7)(n+m-39) = 41$, что приводит к вариантам

$$2.а) \begin{cases} n-m-7=41 \\ n+m-39=1 \end{cases} \quad 2.б) \begin{cases} n-m-7=1 \\ n+m-39=41 \end{cases} \quad 2.в) \begin{cases} n-m-7=-41 \\ n+m-39=-1 \end{cases} \quad 2.г) \begin{cases} n-m-7=-1 \\ n+m-39=-41 \end{cases}.$$

Вариант 2.а дает $m=-4, n=44$, что не удовлетворяет условию задачи.

Вариант 2.б дает $m=36, n=44$, что не удовлетворяет условию задачи, поскольку $n-m=8 > 7$.

Вариант 2.в дает $m=36, n=2$, что не удовлетворяет условию задачи, поскольку $m > n$.

Вариант 2.г дает $m=-4, n=2$, что не удовлетворяет условию задачи.

Таким образом, задача имеет единственное решение $m=37, n=43$.

3. Ответ: $a=957$

Решение. (можно решать продуманным перебором)

Число $a=33k, k \in \mathbb{Z}, k > 0$ и $a=5m+2, m \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Тогда } 33k - 5m = 2 \rightarrow \begin{cases} k = -1 + 5s \\ m = -7 + 33s, s \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ и } a = 33(5s-1) = 165s - 33, s \in \mathbb{Z}.$$

Наибольшее трехзначное число $a=957$ соответствует $s=6$.

4. Ответ: $s \in (10; 12)$

Решение.

На рис. изображена зависимость пути от времени для Вовы и Пети.

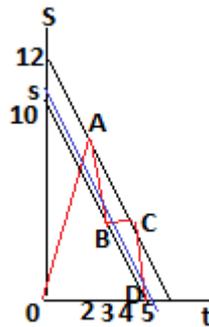


Рис. 1

Красным цветом отмечен путь Вовы, синим — Пети. Отправление Пети происходит из точки на оси OS с ординатой s .

Путь Вовы состоит из 4 отрезков: OA, AB, BC и CD . На каждом из них должна состояться их встреча. Определим при каких s это возможно.

Случай 1, встреча на отрезке OA .

$$t_1 \in (0, 2) - \text{ время встречи, } 6 \cdot t_1 = s \rightarrow t_1 = \frac{s}{6} \in [0; 2] \rightarrow s \in [0; 12]$$

Случай 2, встреча на отрезке AB .

$$t_2 \in [2; 3] - \text{ время встречи, } s - 2t_2 = 4 \cdot 2 - 4(t_2 - 2) \rightarrow t_2 = \frac{16-s}{2} \in [2; 3] \rightarrow s \in [10; 12]$$

Случай 3, встреча на отрезке BC .

$$t_3 \in [3;4] - \text{ время встречи, } s - 2t_3 = 4 \cdot 1 \rightarrow t_3 = \frac{s-4}{2} \in [3;4] \rightarrow s \in [10;12]$$

Случай 4, встреча на отрезке CD .

$$t_4 \in [4;5] - \text{ время встречи, } s - 2t_4 = 4 \cdot 1 - 4(t_4 - 4) = 20 - 4t_4 \rightarrow t_4 = \frac{20-s}{2} \in [4;5] \rightarrow s \in [10;12]$$

Поскольку значению $s = 10$ соответствует 3 встречи, а $s = 12$ - две встречи (см. рис.), то ответом является интервал $s \in (10,12)$

5. Ответ: $L_{\min} = \sqrt{(a+b)^2 + d^2} + c = 550$ м

Решение.

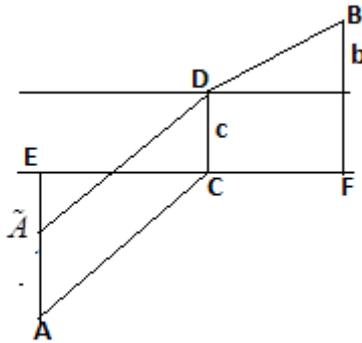


Рис. 1

Пусть CD - мост, длины c . Через точку D проводим прямую $D\tilde{A}$, параллельную AC . Четырехугольник $A\tilde{A}DC$ - параллелограмм. Длина пути $ACDB$ равна длине ломанной $A\tilde{A}DB$, в которой длина звена $A\tilde{A}$ равна c и не зависит от точки C (положения моста). Длина ломанной $A\tilde{A}DB$ будет минимальной, если ломанная $\tilde{A}DB$ совпадет с отрезком $\tilde{A}B$. Поэтому положение моста определяется точкой \tilde{D} пересечения прямой $\tilde{A}B$ с береговой линией (см. рис.2).

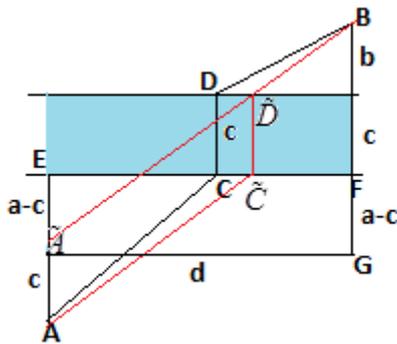


Рис. 2

Вычисление длины оптимальной ломаной:

$$BG = a+b, \tilde{A}G = d, \tilde{A}B = \sqrt{(a+b)^2 + d^2}, L_{\min} = \sqrt{(a+b)^2 + d^2} + c.$$