2.19. Олимпиада имени И.В.Савельева (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 7 класс

1. (2 балла) Петя и Саша увлекаются бегом трусцой. Их дома расположены вдоль дороги на расстоянии 12 км. Саша бежит в сторону Петиного дома со скоростью 6 км/час, через час останавливается и ждет Петю в течении часа и возвращается обратно. Петя выбегает спустя 0,5 часа после Саши и бежит по дороге в сторону его дома. Какова должна быть скорость бега Пети, чтобы Саша его дождался?

2. (2 балла) Если каждую цифру четырехзначного числа a, не начинающегося с 9 заменить цифрой, дающей в сумме с ней девятку, то новое число

будет на 257 больше a. Найти число a.

3. (2 балла) Найти наибольшее трехзначное целое, положительное число x, для которого $НОД(x,9)+НОД(x,14)=16$.

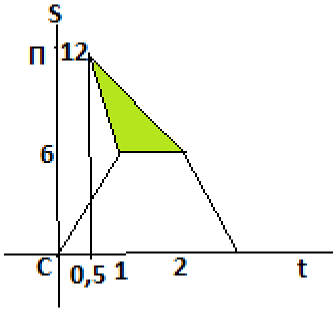
4. (2 балла) При каких a и b уравнение $(3a+2b-1)x=4a-b+6$ имеет бесконечное число решений?

5. (2 балла) Точка M расположена внутри прямоугольника с площадью 5. Точки P, Q, N и K симметричны точке M относительно сторон прямоугольника. Найти площадь четырехугольника $PQNK$.

Ответы и решения

1. Ответ: $v\in[4;12]$

Решение.



Петя должен пройти 6 км. за время от 0,5 часа до 1,5 часа, т.е. иметь скорость от 4 км/час до 12км/час.

2. Ответ: $a=4871$

Решение.

Пусть x, y, z и u - цифры, участвующие в записи числа a. Тогда $a=x\cdot 10^3+y\cdot 10^2+z\cdot 10+u$ и

$a+257=(9-x)\cdot 10^3+(9-y)\cdot 10^2+(9-z)\cdot 10+9-u=9999-a\to$

$\to 2a=9999-257=9742\to a=4871$

3. Ответ: $x_{\max}=945$

Решение.

Для любого натурального x выражение $НОД(x,9)$ принимает только три значения: 1, 3 и 9, а выражение $НОД(x,14)$ - четыре значения: 1, 2, 7 и 14. Их сумма равна 16 только в одном варианте $НОД(x,9)=9$ и $НОД(x,14)=7$. Из первого равенства следует, что x делится на 9, а из второго – делится на 7, т.е. x делится на 63 и для некоторого целого n имеем $x=63n$. При этом x должно быть нечетным, так как в противном $НОД(x,14)=14$. Таким образом, $x=63(2k+1)=126k+63$ для некоторого целого $k\ge 0$. По условию число x трехзначное, т.е. $100\le x\le 999\to 100\le 126k+63\le 999\to k=1,2,3,...,7$. Наибольшее x соответствует $k=7$ и равно $x_{\max}=126\cdot 7+63=945$.

4. Ответ: $a=-1,\ b=2$

Решение. Любое x является решением уравнения, если $\begin{cases}3a+2b-1=0\\4a-b+6=0\end{cases}\to a=-1, b=2$.

5. Ответ: 10

Решение.

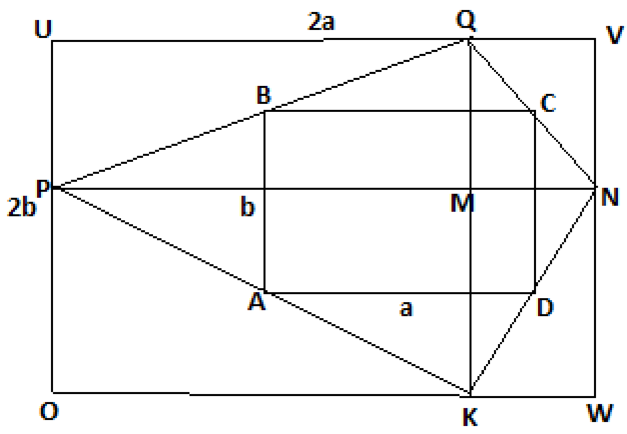


Рис.

На рис. изображены: 1) прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и b ; 2) Точки P, Q, N и K симметричные точке M относительно сторон прямоугольника; 3) прямоугольник $UVWO$ со сторонами параллельными диагоналям четырехугольника $PQNK$.

По построению:

1) стороны прямоугольника $UVWO$ равны $2a$ и $2b$, поэтому его площадь равна $4S$;

2) прямоугольные треугольники PUQ и PMQ равновелики. Аналогичное утверждение верно для треугольников QVN и QMN, треугольников NWK и NMK , треугольников POK и PMK.

3) Четырехугольник $PQNK$ разбит на прямоугольные треугольники PMQ, QMN, NMK и PMK, поэтому его площадь равна половине площади прямоугольника $UVWO$, т.е. $2S$. Заметим, что ответ не зависит от положения точки M внутри прямоугольника.