2.9. Олимпиада имени И.В.Савельева (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 11 класс

1. (2 балла) Для многочлена $P(t)=t^3+3t^2-9t-27$ найти x, при котором выражение $P\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)$ принимает наименьшее возможное значение.

2. (2 балла) Сколько пар чисел $(x;y), 0\le x\le 4\pi, -2\pi\le y\le 2\pi$,удовлетворяют системе $\begin{cases}\cos x+\sin y=1\\ \sin x+\cos y=\sqrt{2}\end{cases}$. Найти значения первой координаты x таких решений.

3. (2 балла) Числа x, y и z , не равные нулю, таковы, что их квадраты в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии, а числа $10x, 4y^2$ и $5z^3$ - последовательными членами геометрической прогрессии. Найти все такие тройки x, y и z , если известно, что отношение $x:z$ рационально.

4. (2 балла) Маша строила числовое множество следующим образом. На первом шаге, она взяла точки 1 и 16 на числовой оси и написала между ними их среднее геометрическое. На втором и последующих шагах, между любыми двумя соседними числами, полученными на предыдущих этапах, она располагала их средние геометрические. Сколько чисел появится на числовой оси после десятого шага и какова их сумма? Какое число будет стоять на девятом месте, если считать, что полученное после десятого шага
числовое множество упорядочено по возрастанию?

5. (2 балла) При каких значениях a система уравнений $\begin{cases}\left|x\cos a+y\sin a\right|+\left|y\cos a-x\sin a\right|=1\\ x\sqrt{3}-y+\sqrt{2}=0\end{cases}$ имеет бесконечное число решений?

6. (2 балла) Точка M - середина ребра AD куба $ABCDA'B'C'D'$ с ребром a. Через точку B' проведена прямая L, параллельная плоскостям $A'BM$ и $C'BD$. Найти длину отрезка прямой L, расположенного внутри куба.

Ответы и решения

1. Ответ: 1) $x_1=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$ 2) $x_2=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$

Решение.

Выражение $t=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ принимает значения на отрезке $[-2;2]$.

Критические точки многочлена на отрезке $[-2;2]$:

$$P'(x)=3t^2+6t-9=2(t^2+2t-3)=0\to\left[\begin{array}{c}t_1=1\\ t_2=-3\notin[-2;2]\end{array}\right.$$

Нахождение минимального значения многочлена на отрезке $[-2;2]$:

$P(-2)=-5$, $P(1)=-32$, $P(2)=-25$. Таким образом, многочлен принимает минимальное значение при $t=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1\to\left[\begin{array}{l}x-\pi/3=\pi/6+2\pi k\\ x-\pi/3=5\pi/6+2\pi k\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l}x=\pi/2+2\pi k,\\ x=7\pi/6+2\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$

2. Ответ: 1) 16 решений

2) $x_1=\dfrac{\pi}{3}-arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ x_2=\dfrac{7\pi}{3}-arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ x_3=\dfrac{2\pi}{3}-arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ x_4=\dfrac{8\pi}{3}-arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Решение.

Преобразование: $\begin{cases} \cos^2 x = (1-\sin y)^2 \\ \sin^2 x = \left(\sqrt{2}-\cos y\right)^2 \end{cases} \to 1 = 3 - 2\sin y - 2\sqrt{2}\cos y + 1 \to \sin y + \sqrt{2}\cos y = \dfrac{3}{2}$.

$\sin y \ge 0,\ \cos y \ge 0$

Аналогично, $\begin{cases} \cos^2 y = \left(\sqrt{2}-\sin x\right)^2 \\ \sin^2 y = (1-\cos x)^2 \end{cases} \to 1 = 3 - 2\cos x - 2\sqrt{2}\sin x + 1 \to \sqrt{2}\sin x + \cos x = \dfrac{3}{2}$.

$\sin x \ge 0,\ \cos x \ge 0$

С использованием формулы дополнительного аргумента $\alpha = arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{\pi}{4},\ \beta = arctg\sqrt{2} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ система примет вид:

$$\begin{cases} \sin(x+\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(y+\beta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \to \begin{cases} \sin(x+\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(y-\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \to \begin{cases} x = -\alpha + (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{3} + \pi k, \sin x \ge 0, \cos x \ge 0, \forall k \in Z \\ y = \alpha \pm \dfrac{\pi}{6} + 2\pi m, \sin y \ge 0, \cos y \ge 0, \forall m \in Z \end{cases} .$$

Для серии $x = \dfrac{\pi}{3} - \alpha + 2\pi k, k \in Z$ ограничениям удовлетворяют два значения, соответствующие $k=0$ и $k=1$: $x_1 = \dfrac{\pi}{3} - arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \dfrac{7\pi}{3} - arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Для серии $x = \dfrac{2\pi}{3} - \alpha + 2\pi k, k \in Z$ ограничениям $0 \le x \le 4\pi$ удовлетворяют с учетом $\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ также два решения, соответствующие $k=0$ и $k=1$: $x_3 = \dfrac{2\pi}{3} - arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ x_4 = \dfrac{8\pi}{3} - arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Среди серий для y ограничениям удовлетворяют также 4 решения, поэтому система имеет $4 \times 4 = 16$ допустимых решений.

3. Ответ: $x = 2s,\ y = \pm s \cdot \sqrt{5/2}, z = s,\ s \in R$

Решение.

Условия: $\begin{cases} x^2 + z^2 = 2y^2 \\ 25xz^3 = 8y^4 \end{cases}$

Решение системы: исключаем переменную y^2 из второго уравнения системы:

$\left(x^2+z^2\right)^2 = 4y^4 \to 2\left(x^2+z^2\right)^2 = 25xz^3 \to 2x^4 + 4x^2z^2 + 2z^4 = 25xz^3$.

Обозначение: $t = x:z-$ рациональное число (по условию). Делим правую и левую части уравнения на $z^4 \ne 0$: $2t^4 + 4t^2 - 25t + 2 = 0$ (*). Уравнение имеет целый корень $t = 2$:

$(t-2)\left(2t^3 + 4t^2 + 12t - 1\right) = 0$. Уравнение $2t^3 + 4t^2 + 12t - 1 = 0$ может иметь рациональные корни только $t = \pm 1, \pm 0{,}5$. Проверяем, что ни одно из этих чисел не удовлетворяет уравнению, поэтому уравнение имеет только один рациональный корень $t = 2$.

Тогда $\begin{cases} x = 2z \\ 2y^2 = 5z^2 \to y = \pm z \cdot \sqrt{\dfrac{5}{2}} \end{cases}$.

4. Ответ: 1) $k_{10} = 2^{10} + 1$ 2) $S_{10} = \dfrac{15}{(16)^{1/2^{10}} - 1}$ 3) $a_{10,9} = (16)^{8/2^{10}} = \sqrt[32]{2}$

Решение.

На первом этапе, три числа $a, \sqrt{ab}, b$ являются последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $q_1 = \sqrt{b/a} = (b/a)^{1/2}$. На втором этапе пять чисел $a, a^{3/4} \cdot b^{1/4}, a^{1/2} \cdot b^{1/2}, a^{1/4} \cdot b^{3/4}, b$ также являются последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $q_2 = \sqrt{q_1} = \sqrt[4]{b/a} = \left(b/a\right)^{1/2^2}$. Общее число членов на $n-$ом этапе равно $k_n = 2^n + 1$. Сделаем индуктивное предположение о том, знаменатель прогрессии на $(n-1)-$ом этапе равен $q_{n-1} = \left(b/a\right)^{1/2^{n-1}}$. Если a_k и a_{k+1} два соседних числа на $(n-1)-$ом этапе, то $\dfrac{\sqrt{a_k \cdot a_{k+1}}}{a_k} = \dfrac{\sqrt{a^2 \cdot q_{n-1}^{k-1} \cdot q_{n-1}^{k}}}{a \cdot q_{n-1}^{k-1}} = (q_{n-1})^{1/2} = \left(b/a\right)^{1/2^n} = q_n$. К аналогичному результату, придем если $\dfrac{a_{k+1}}{\sqrt{a_k \cdot a_{k+1}}} = q_n$. Таким образом, на $n-$ом этапе полученные числа являются членами геометрической прогрессии с первым членом a и знаменателем $q_n = \left(b/a\right)^{1/2^n} = q_n$. Ее сумма S_n равна

$$S_n = \frac{a\left(1-q_n^{k_n-1}\right)}{1-q_n} = \frac{a\left(1-q_n^{2^n}\right)}{1-(b/a)^{1/2^n}} = \frac{a\left(1-b/a\right)}{1-(b/a)^{1/2^n}} = \frac{b-a}{(b/a)^{1/2^n}-1}.$$

Член под номером m геометрической прогрессии на $n-$ом этапе равен $a_{n,m} = a \cdot q_n^{m-1} = a \cdot (b/a)^{(m-1/2^n}$

5. Ответ: $a = \dfrac{7\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z$

Решение.

Случай 1. Раскрытие модулей $+,+$

Преобразование первого уравнения:

$$x\left(\cos a - \sin a\right) + y\left(\sin a + \cos a\right) = 1 \to x\sqrt{2}\cos\left(a + \pi/4\right) + y\sqrt{2}\sin\left(a + \pi/4\right) = 1$$

Это уравнение прямой, на которой лежит отрезок (один из четырех сторон параллелограмма), координаты точек которого удовлетворяют первому уравнению системы. Если система имеет бесконечное число решений, то уравнения прямых совпадают:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(a+\pi/4\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}\sin\left(a+\pi/4\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \to \begin{cases} \cos\left(a+\pi/4\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(a+\pi/4\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \to \left(a+\pi/4\right) = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \to a = \frac{7\pi}{12} + 2\pi k$$

Случай 2. Раскрытие модулей $+,-$

Преобразование первого уравнения:

$$x\left(\cos a + \sin a\right) + y\left(\sin a - \cos a\right) = 1 \to x\sqrt{2}\cos\left(a - \pi/4\right) + y\sqrt{2}\sin\left(a - \pi/4\right) = 1$$

Условие совпадения прямых (бесконечное число решений):

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(a-\pi/4\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}\sin\left(a-\pi/4\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \to \begin{cases} \cos\left(a-\pi/4\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(a-\pi/4\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \to \left(a-\pi/4\right) = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \to a = \frac{13\pi}{12} + 2\pi k$$

Случай 3. Раскрытие модулей $-,+$

Преобразование первого уравнения:

$$-x\left(\cos a + \sin a\right) - y\left(\sin a - \cos a\right) = 1 \to -x\sqrt{2}\cos\left(a - \pi/4\right) - y\sqrt{2}\sin\left(a - \pi/4\right) = 1$$

Условие совпадения прямых (бесконечное число решений):

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos(a-\pi/4)=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ \sqrt{2}\sin(a-\pi/4)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\to\begin{cases}\cos(a-\pi/4)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(a-\pi/4)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\to(a-\pi/4)=\frac{11\pi}{6}+2\pi k\to a=\frac{25\pi}{12}+2\pi k$$

Случай 4. Раскрытие модулей $-,-$

Преобразование первого уравнения:
$x(\sin a-\cos a)-y(\sin a+\cos a)=1\to -x\sqrt{2}\cos(a+\pi/4)-y\sqrt{2}\sin(a+\pi/4)=1$

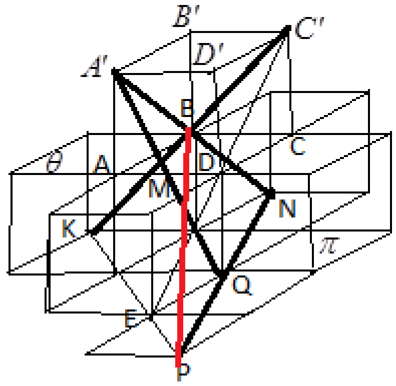
Условие совпадения прямых (бесконечное число решений):

$$\begin{cases}-\sqrt{2}\cos(a-\pi/4)=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ -\sqrt{2}\sin(a-\pi/4)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\to\begin{cases}\cos(a+\pi/4)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(a+\pi/4)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\to(a+\pi/4)=\frac{11\pi}{6}+2\pi k\to a=\frac{19\pi}{12}+2\pi k$$

Объединение случаев 1-4 дает ответ: $a=\dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z$

6. Ответ: $\dfrac{\sqrt{14}}{3}a$

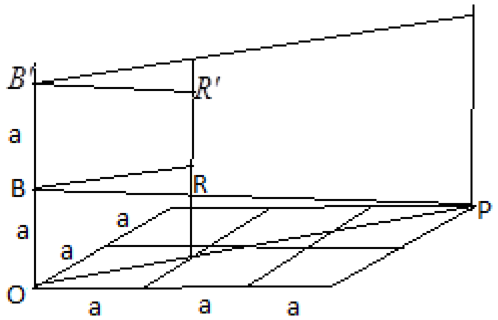
Решение.



Плоскость π параллельна плоскости θ (основание куба) и отстоит от нее на расстояние a .
Точка B является общей для плоскостей $A'BM$ и $C'BD$. На рис. указано построение другой точки P , принадлежащей этим плоскостям.

1 шаг. Построение прямых $A'M$ и $A'B$ до их пересечения с плоскостью π в точках Q и N соответственно. Прямая QN принадлежит плоскости π и плоскости $A'BM$.

2 шаг. Построение прямых $C'B$ и $C'D$ до их пересечения с плоскостью π в точках K и E . Прямая KE принадлежит плоскости π и плоскости $C'BD$. Прямые QN и KE пересекаются в точке P и поэтому прямая BP является линией пересечения заданных плоскостей $A'BM$ и $C'BD$.
Искомая прямая , проходящая через точку B' , параллельна прямой BP .



3 шаг. Вычисление длины искомого отрезка. R' принадлежит грани $AA'D'D$ куба.

$OP = a\sqrt{13}$, $B'R' = BR = \frac{1}{3}BP$, $BP = a\sqrt{14}$, поэтому $B'R' = BR = \frac{\sqrt{14}}{3}a$