2.15. Олимпиада имени И.В.Савельева (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 10 класс

1. (2 балла) Решить уравнение $f(f(x)) = f(x)$, где $f(x) = \dfrac{2(2x+1)}{x+3}$.

2. (2 балла) При каких значениях a все положительные решения уравнения $\sin(x-a)\cdot(\sin x + \cos x) = 0$, расположенные в порядке возрастания, являются членами арифметической прогрессии? Найти разность этой прогрессии.

3. (2 балла) Множество M_k - объединение корней уравнений $x^2 + a_n x - 4 - 2a_n = 0$ для $n = 1, 2, ..., k$. Здесь a_n - члены арифметической прогрессии, для которой $a_{20} = 59$ и $a_{40} = 119$. Найти сумму всех чисел из M_{100}.

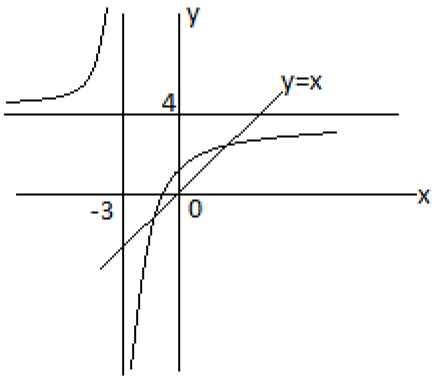
4. (2 балла) Найти a, b и c, для которых система $\begin{cases} (2x-3y+6)(2x-y-2)=0 \\ (2x+y-2)(2x+3y+6)=0 \\ (x-a)^2+(y-b)^2=c^2 \end{cases}$ в области $x \ge -1$ имеет ровно три решения.

5. (2 балла) На сторонах AB и AC треугольника ABC расположены точки D и E так, что $AD:AB = 1:3$ и $CE:CA = 1:4$. Прямые CD, BE и медиана, проведенная из вершины A, попарно пересекаются в точках M, N и P. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

Ответы и решения

1. Ответ: $x = -1,\ x = 2$

Решение. Построим график функции $f(x)$:



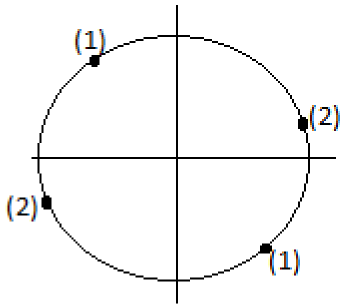
Прямая $y = x$ пересекает гиперболу в точках с абсциссами $x = -1,\ x = 2$.
$f(-1) = -1 \neq -3,\ \ f(2) = 2 \neq -3$, поэтому $f(f(-1)) = f(-1)$ и $f(f(2)) = f(2)$.
Других корней нет, поскольку уравнение $f(f(x)) = f(x)$ сводится к квадратному уравнению (или по монотонности функции $f(x)$).

2. Ответ: 1) $a = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$

2) $d = \frac{\pi}{2}$ для $a = \frac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z$ и $d = \pi$ для $a = -\frac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z$

Решение.

Множество решений уравнения представляет собой объединение решений уравнения (1) $\sin x + \cos x = 0$ и уравнения (2) $\sin(x - a) = 0$. Для уравнения (1) это $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$, для уравнения (2) $x = a + \pi k, k \in Z$. Эти решения изображены на тригонометрическом кругу:



Положительные решения из объединения могут быть членами одной арифметической прогрессии, если 1) $a = \frac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z$, при этом $d = \frac{\pi}{2}$ 2) $a = -\frac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z$. Тогда множества решений уравнений (1) и (2) совпадают и $d = \pi$

3. Ответ: $S = -15248$

Решение.

Заметим, что $x_{1,n} = 2$ является корнем уравнений для всех n и принадлежит M_{100}. Поэтому сумма вторых корней $x_{2,n} = -2 - a_n$ уравнений равна $S_2 = -2 \cdot 100 - \sum_{n=1}^{100} a_n = -200 - \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100$.

Нахождение a_1 и a_{100} : $\begin{cases} a_1 + 19d = 59 \\ a_1 + 39d = 119 \end{cases} \to \begin{cases} 20d = 60 \\ 20a_1 = 40 \end{cases} \to a_1 = 2,\ d = 3 \to a_{100} = 2 + 3 \cdot 99 = 299$.

Тогда $S_2 = -200 - \frac{2 + 299}{2} \cdot 100 = -15250$. Тогда $S = 2 + S_2 = -15248$.

4. Ответ: $a = -1,5\ \ b = 0\ \ c = \pm 2,5$

Решение.

Рассмотрим уравнения четырех прямых

$2x-3y+6=0$ (1), $2x-y-2=0$ (2), $2x+y-2=0$ (3) $2x+3y+6=0$ (4)

Решением системы $\begin{cases}(2x-3y+6)(2x-y-2)=0\\(2x+y-2)(2x+3y+6)=0\end{cases}$ являются объединение решений систем

А: $\begin{cases}2x-3y+6=0\\2x+y-2=0\end{cases}\to x_1=0,\ y_1=2$ Б: $\begin{cases}2x-3y+6=0\\2x+3y+6=0\end{cases}\to x_2=-3,\ y_2=0$

С: $\begin{cases}2x-y-2=0\\2x+y-2=0\end{cases}\to x_3=1,\ y_3=0$ Д: $\begin{cases}2x-y-2=0\\2x+3y+6=0\end{cases}\to x_3=0,\ y_3=-2$,

в которых только Б не удовлетворяет условию $x\ge -1$. Нужно выбрать параметры a,b и c так, чтобы окружность $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ была описана около треугольника АСД.

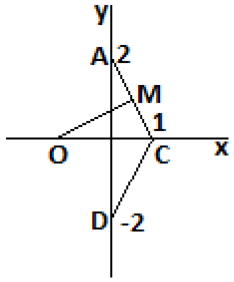


Рис.

Точка O - центр окружности, M - середина отрезка AC, OM - срединный перпендикуляр, угловой коэффициент прямой AC равен -2, угловой коэффициент прямой OM равен $1/2$.

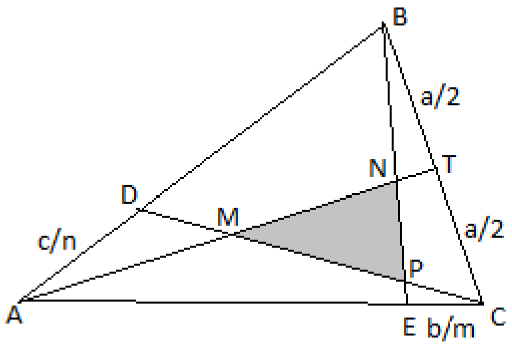
Уравнение прямой OM: $y-1=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})\to 2x-4y=-3$.

Координаты точки $O(-3/2;0)\to a=-3/2, b=0$.

Радиус искомой окружности $r=OC=5/2\to c^2=(2,5)^2\to c=\pm 2,5$.

5. Ответ: $25:252$

Решение.



1. Т. Менелая для $\triangle CAT$ и секущей EB: $\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AN}{NT}\cdot\frac{TB}{BC}=1\to\frac{1}{m-1}\cdot\frac{AN}{NT}\cdot\frac{1}{2}=1\to\frac{AN}{NT}=2(m-1)$

Обозначения: $AM=u\cdot AT,\ MN=v\cdot AT,\ NT=w\cdot AT$.

В этих обозначениях предыдущее равенство имеет вид: $\frac{u+v}{w}=2(m-1)$ (1)

2. Площадь $S_{ATC}=\frac{1}{2}\cdot S_{ABC}$. Отношение площадей $S_{EAN}:S_{CAT}=\frac{AN}{AT}\cdot\frac{AE}{AC}=\frac{u+v}{u+v+w}\cdot\frac{m-1}{m}=\frac{(u+v)/w}{(u+v)/w+1}\cdot\frac{m-1}{m}=\frac{2(m-1)}{2m-1}\cdot\frac{m-1}{m}=2\frac{(m-1)^2}{m(2m-1)}$.

Тогда $S_{EAN}=\frac{(m-1)^2}{m(2m-1)}\cdot S_{ABC}$.

3. т. Менелая для $\triangle BAT$ и секущей CD.

$$\frac{BD}{DA}\cdot\frac{AM}{MT}\cdot\frac{TC}{CB}=1\to(n-1)\cdot\frac{u}{v+w}\cdot\frac{1}{2}=1\to\frac{u}{v+w}=\frac{2}{n-1}\to\frac{n-1}{2}\cdot\frac{u}{w}-\frac{v}{w}=1\quad(2).$$

С учетом уравнения (1) $\frac{u}{w}+\frac{v}{w}=2(m-1)$ и сложения с (2), получим $\frac{n+1}{2}\cdot\frac{u}{w}=2m-1\to\frac{u}{w}=\frac{2(2m-1)}{n+1}$. Подставляя полученное значение отношения в (2), получим после преобразования: $\frac{v}{w}=\frac{2\left(mn-n-m\right)}{n+1}$ и $\frac{v}{u}=\frac{mn-n-m}{2m-1}$

4. т. Менелая для $\triangle ANE$ и секущей MC .

$$\frac{AM}{MN}\cdot\frac{NP}{PE}\cdot\frac{EC}{CA}=1\to\frac{u}{v}\cdot\frac{NP}{PE}\cdot\frac{1}{m}=1\to\frac{NP}{PE}=m\cdot\frac{v}{u}=\frac{m(mn-n-m)}{2m-1}$$

Тогда $\frac{NP}{NE}=\frac{NP}{NP+PE}=\frac{NP/PE}{NP/PE+1}=\frac{m\left(mn-n-m\right)}{m\left(mn-n-m\right)+2m-1}$

5. Отношение площадей (после преобразования)

$$S_{MNP}:S_{ANE}=\frac{v}{u+v}\cdot\frac{NP}{NE}=\frac{m(mn-n-m)^2}{m(mn-n-m)^2+(2m-1)(m+1)(mn-n-m)+(2m-1)^2}$$

Наконец, объединяя с пунктом 2, получим

$$S_{MNP}=\frac{(m-1)^2\cdot t^2}{\left(mt^2+(2m-1)(m+1)t+(2m-1)^2\right)(2m-1)}S_{ABC}$$, где $t=mn-n-m$.